UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité : **Mathématiques**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par

Kevin Langlois

Thèse dirigée par **Mikhail Zaidenberg**

préparée au sein **Institut Fourier**
et de **l'école doctorale MSTII**

Sur les opérations de tores algébriques de complexité un dans les variétés affines

Thèse soutenue publiquement le **24 Septembre 2013**,
devant le jury composé de :

M. David A. Cox
Professeur, Amherst College Faculty, Rapporteur
M. Jürgen Hausen
Professeur, Universität Tübingen, Rapporteur
M. Hanspeter Kraft
Professeur, Universität Basel, Président
M. Michel Brion
Directeur de recherche, Institut Fourier, Examinateur
M. Mikhail Zaidenberg
Professeur, Institut Fourier, Directeur de thèse

Sur les opérations de tores algébriques de complexité un dans les variétés affines

Kevin Langlois

À l'île en forme de papillon.

Remerciements

Je souhaite en premier lieu adresser mes remerciements à mon directeur de thèse, Mikhail Zaidenberg. J'ai eu la chance pendant ces trois années de thèse d'être encadré par une personne incroyable que ce soit du point de vue professionnel ou des échanges amicaux que nous avons eus. Vous m'avez beaucoup transmis avec patience, délicatesse et bonne humeur. Vous m'avez laissé la liberté de mener mes propres recherches. Vous avez contribué de façon significative à améliorer mon propre potentiel. Vous m'avez formé au métier d'enseignant chercheur. Je suis très fier d'être votre élève.

Je remercie David A. Cox pour avoir accepté d'être un des rapporteurs de cette thèse. Durant la deuxième année de mastère, j'ai appris la théorie des variétés toriques à partir du livre que vous avez écrit avec John Litlle et Hal Schenck. Je vous dois de façon indirecte la plupart de mes connaissances sur ce sujet, à nouveau, merci.

Je remercie Jürgen Hausen pour avoir accepté d'être un des rapporteurs de cette thèse. Vous êtes un des fondateurs avec Klaus Altmann de la théorie des diviseurs polyédraux sur laquelle j'ai travaillé pendant trois ans. Sans vos travaux remarquables, cette thèse n'existerait pas, merci encore.

Je remercie Michel Brion et Hanspeter Kraft pour avoir accepté d'être un des membres du jury. Merci encore de vous être intéressés à mes travaux de recherche et d'avoir apporté des corrections ou des remarques pendant mes années de thèse. Je remercie également Alvaro Liendo pour le travail en collaboration du dernier chapitre de cette thèse et, Ivan Arzhantsev et Hubert Flenner pour m'avoir donné quelques conseils.

Je souhaiterais remercier toutes les personnes qui ont contribué à ma formation. Donnons une liste non exhaustive.

Un grand merci à José Bertin, à Catherine Bouvier, à Jean-Pierre Demailly, à Zindine Djadli, à Odile Garotta, à Benoit Kloeckner et à Frédéric Mouton pour m'avoir formé au métier d'enseignant.

Lors de l'été qui suit la première année de mastère, j'ai eu la chance d'avoir un stage introductif à la théorie des schémas en groupes. Je remercie sincèrement Matthieu Romagny pour avoir supervisé ce stage et pour les échanges de courriers électroniques utiles que nous avons eus pendant la thèse.

Je dois beaucoup à Siegmund Kosarew qui a dirigé mon stage de première année de mastère. À cette époque nos discussions hebdomadaires m'ont donné certainement un premier aperçu de la recherche. Merci pour tout ce que vous m'avez apporté.

Je tiens à saluer Emmanuel Auclair et Vincent Despiegiel. Vous m'avez transmis la passion des mathématiques dès les premières années universitaires et la conviction de faire des mathématiques mon métier.

Je remercie le personnel administratif et d'entretien de l'institut Fourier, de l'U.F.R. de mathématiques de l'université Joseph Fourier, et de l'école doctorale EDMSTII pour leur travail remarquable.

Je tiens à remercier les personnes qui valorisent la recherche mathématique au quotidien notamment dans mes centres d'intérêts.

Je tiens à remercier les membres de l'A.N.R. Birpol (géométrie birationnelle et automorphismes polynomiaux), à savoir, Jérémy Blanc, Serge Cantat, Julie Déserti, Adrien Dubouloz, Eric Edo, Jean-Philippe Furter, Julien Grivaux, Stéphane Lamy, Frédéric Mangolte et Lucy Moser-Jauslin.

Encore merci à Bashar Alhajjar, Adrien Dubouloz, Lucy Moser-Jauslin, Shameek Paul, et Charlie Petitjean pour leur accueil chaleureux à Dijon. Je tiens aussi à saluer les amis bâlois, à savoir, Emilie Dufresne, Andriy Regeta, Maria Fernanda Robayo, Pierre-Marie Poloni, Immanuel Stampfli et Suzanna Zimmermann. Merci Pierre-Marie pour m'avoir invité à faire un exposé à Bâle.

Je tiens à saluer les personnes que j'ai rencontrées lors des événements concernant la théorie de Lie, à savoir, Pramod Ashar, Cédric Bonnafé, Olivier Dudas, Stéphane Gaussent, Daniel Juteau, Thierry Levasseur, Pierre-Louis Montagard, Anne Moreau, Boris Pasquier, Nicolas Ressayre, Simon Riche, Alexis Tchoudjem. Encore merci à Pierre-Louis Montagard et Etienne Mann pour leur invitation à faire un exposé à Monpellier.

Je tiens à remercier les jeunes géomètres non commutatifs clermontois. Merci à Colin Mrozinski et à Manon Thibault de Chanvalon pour votre soutien et pour vous intéresser à mes maths. La rencontre INTER'ACTIONS a été un franc succès ! Merci de m'avoir invité pour faire un exposé à cette magnifique conférence.

Je remercie sincèrement Bernard Teissier pour m'avoir invité à faire un exposé au laboratoire Sophie Germain. Je tiens à saluer également Ana Belén de Felipe, Monique Lejeune-Jalabert et Hussein Mourtada pour leur accueil chaleureux.

À tous mes amis que j'ai rencontré à l'université ou autre part.

À Alban, Alexei, Binbin, Brahim, Charlotte, Chloé, Claire, Clélia, Eve-Marie, Guena, Gunnar, Jane, Jean, Jesus, Junyan, Karine, Laurent, Lorick, Manon, Marie, Marjo, Marta, Mickael, Monique, Noémie, Fred, Olivier, Pierre-Alain, Rémy, Roland, Ronan, Sandrine, Sasha, Teddy, Thibault, Vincent, etc.

Aux fous rires de nos vies ridicules ...

Je tiens à remercier tous mes amis d'enfances qui font de moi un homme heureux ! Je m'adresse notamment à tous les membres de la DT38 !

Au petit Rémy (photographe), à François (producteur), à Jacky (manager/photographe), à Mike (supporteur), à Mud (batterie), à Nico (chant) et à Timon (guitare).

Je remercie mes parents pour leur soutien constant et pour avoir accepté ma passion. À mon cousin Mathieu, que je considère comme mon grand frère, qui a eu 30 ans et qui vient d'avoir un enfant.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction générale

Soit X une variété algébrique affine normale munie d'une opération fidèle d'un tore algébrique $\mathbb{T}$. Supposons que le corps de base $\mathbf{k}$ est algébriquement clos de caractéristique 0. Alors X peut être décrite par des objets combinatoires de géométrie convexe. Plusieurs descriptions ont été obtenues notamment par les travaux de Mumford, Dolgachev, Pinkham, Demazure, Timashev, Flenner, Zaidenberg, Altmann, Hausen, e.a. Dans cette thèse, nous étudions des problèmes nouveaux concernant les propriétés algébriques et géométriques de la variété X.

Rappelons que la présentation d'Altmann-Hausen en termes de diviseurs polyédraux donne une description explicite de l'algèbre M-graduée $\mathbf{k}[X]$ des fonctions régulières de la variété X, où M est le réseau des caractères de $\mathbb{T}$. Plus précisément, si N est le réseau dual à M, et $M_{\mathbb{Q}}$, $N_{\mathbb{Q}}$ sont les $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels associés à M, N alors cette présentation est donnée par un triplet $(Y, \sigma, \mathfrak{D})$. La première donnée Y est une variété semi-projective normale sur $\mathbf{k}$; c'est à dire une variété normale qui est projective sur une variété affine. En fait, c'est un quotient d'un ouvert de X par $\mathbb{T}$. En particulier, les orbites générales de l'opération de $\mathbb{T}$ dans X sont de codimension $\dim Y$. La deuxième donnée σ est un cône polyédral saillant de $N_{\mathbb{Q}}$. Le cône dual $\sigma^\vee \subset M_{\mathbb{Q}}$ est le cône des poids de $\mathbf{k}[X]$. La troisième donnée est un diviseur de Weil $\mathfrak{D}$ sur la variété Y dont les coefficients sont des σ-polyèdres de $N_{\mathbb{Q}}$ tous égaux à σ sauf pour un nombre fini. Rappelons qu'un σ-polyèdre dans $N_{\mathbb{Q}}$ est la somme de Minkowski d'un polytope de $N_{\mathbb{Q}}$ avec le cône σ. De plus, l'évaluation $\mathfrak{D}(m)$ de $\mathfrak{D}$ en le vecteur $m \in \sigma^\vee$ est un diviseur de Weil rationnel $\mathbb{Q}$-Cartier, semi-ample et abondant lorsque m est dans l'intérieur relatif de $\sigma^\vee$ (voir [AH]). On a un isomorphisme d'algèbres M-graduées, $\mathbf{k}[X] \simeq A[Y, \mathfrak{D}]$ où

$$A[Y, \mathfrak{D}] := \bigoplus_{m \in \sigma^\vee \cap M} H^0(Y, \mathcal{O}_Y(\lfloor \mathfrak{D}(m) \rfloor))\chi^m.$$

Les éléments χ^m vérifient les relations $\chi^0 = 1$ et $\chi^m \cdot \chi^{m'} = \chi^{m+m'}$, pour tous $m, m' \in \sigma^\vee \cap M$. Réciproquement, en partant d'une présentation d'Altmann-Hausen $(Y, \sigma, \mathfrak{D})$, l'algèbre $A[Y, \mathfrak{D}]$ définit une variété normale sur $\mathbf{k}$ munie d'une opération fidèle de $\mathbb{T}$ avec quotient rationnel Y. Lorsque Y est de dimension 0 (cas de complexité 0), on a

$$H^0(Y, \mathcal{O}_Y(\lfloor \mathfrak{D}(m) \rfloor)) = \mathbf{k}$$

pour tout $m \in \sigma^\vee \cap M$, de sorte que

$$\mathbf{k}[X] \simeq A[Y, \mathfrak{D}] = \bigoplus_{m \in \sigma^\vee \cap M} \mathbf{k}\chi^m.$$

On retrouve ainsi la description bien connue des variétés toriques affines en termes de cônes polyédraux saillants. Une des motivations majeures des travaux présentés dans cette thèse est *la généralisation de résultats connus dans le cas torique (cas* $\dim Y = 0$*) au contexte des diviseurs polyédraux présenté ci-dessus (cas général).* Plus précisément, nous nous intéressons au cas où Y est une courbe algébrique régulière C (cas de complexité 1). Dans ce contexte, on reconstruit aisément C à partir de $A[C, \mathfrak{D}]$.

Cette thèse est divisée en trois parties. Dans la première partie (chapitre 3), un résultat donne une manière explicite de calculer la normalisation d'une variété affine munie d'une opération d'un tore algébrique de complexité 1 en termes de diviseurs polyédraux d'Altmann-Hausen, lorsque $\mathbf{k}$ est algébriquement clos de caractéristique 0. Ce résultat peut être mis en parallèle avec les travaux de Hochster dans le cas torique (voir [Ho]). Comme application, nous nous intéressons à la théorie des idéaux intégralement clos introduite par Zariski, Lejeune-Jalabert, Teissier, etc. (voir [Za, LeTe]). On donne une description combinatoire des idéaux homogènes intégralement clos de l'algèbre $A = A[C, \mathfrak{D}]$, généralisant l'approche de [KKMS]. Nous obtenons sous certaines conditions un critère de normalité pour les idéaux homogènes de A.

Les calculs de la première partie suggèrent une démonstration de la validité de la présentation d'Altmann-Hausen sur un corps quelconque dans le cas de la complexité 1. Ce qui est fait dans la deuxième partie (chapitre 4). Sur un corps de base arbitraire, la descente galoisienne des variétés affines normales munies d'une opération d'un tore algébrique de complexité 1 est décrite par des objets combinatoires que nous appelons diviseurs polyédraux Galois stables. Nous étudions aussi d'autres types d'algèbres multigraduées, celles qui sont définies par un diviseur polyédral sur un anneau de Dedekind.

Dans la troisième partie (chapitre 5), nous étudions la description des racines de Demazure en complexité 1 sur un corps quelconque dans la lignée amorcée par Liendo [Li]. Cette étude est aussi une généralisation en dimension plus grande de résultats dû à Flenner et à Zaidenberg concernant les opérations normalisées du groupe additif dans les surfaces affines complexes munies d'une action de $\mathbb{C}^\star$ (voir [FZ 2]).

Avertissement. Les trois prochains chapitres sont issus d'une publication (voir [La]) et de deux prépublications (voir [La 2, LL]). Les deux prochains chapitres peuvent être lus indépendamment. Le chapitre 5 utilise les conventions du chapitre 4. Chaque chapitre est muni de sa propre introduction détaillée.

Chapitre 2

General introduction

Let X be a normal affine algebraic variety endowed with an effective action of an algebraic torus $\mathbb{T}$. Assume that the ground field $\mathbf{k}$ is algebraically closed of characteristic 0. Then we can describe the variety X by combinatorial objects arising in convex geometry. There exist several descriptions due mainly to the works of Mumford, Dolgachev, Pinkham, Demazure, Timashev, Flenner, Zaidenberg, Altmann, Hausen, among others. In this thesis, we study new problems concerning the algebraic and geometric properties of the variety X.

Let us recall that the Altmann-Hausen presentation in terms of polyhedral divisors provides a concrete description of the M-graded algebra $\mathbf{k}[X]$ of regular functions on X, where M is the character lattice of $\mathbb{T}$. More precisely, if N is the dual lattice of M, and $M_{\mathbb{Q}}$, $N_{\mathbb{Q}}$ are the $\mathbb{Q}$-vector spaces associated to M, N then this presentation is given by a triple $(Y, \sigma, \mathfrak{D})$. The first data Y is a normal semi-projective variety over the field $\mathbf{k}$, i.e., Y is assumed to be projective over an affine variety. Actually, Y is a quotient of an open subset of X by the torus $\mathbb{T}$. In particular, the general $\mathbb{T}$-orbits in X have codimension dim Y. The second data σ is a strongly convex polyhedral cone of $N_{\mathbb{Q}}$. The dual cone $\sigma^\vee \subset M_{\mathbb{Q}}$ is the weight cone of the M-graded algebra $\mathbf{k}[X]$. The third data is a Weil divisor $\mathfrak{D}$ over Y whose coefficients are σ-polyhedra of $N_{\mathbb{Q}}$ equal to σ for all but finitely many prime divisors of Y. Recall that a σ-polyhedron in $N_{\mathbb{Q}}$ is the Minkowski sum of a polytope of $N_{\mathbb{Q}}$ with the cone σ. Furthermore, the evaluation $\mathfrak{D}(m)$ of $\mathfrak{D}$ in a vector $m \in \sigma^\vee$ is a rational $\mathbb{Q}$-Cartier divisor, semi-ample, and big for m in the relative interior of the cone $\sigma^\vee$ (see [AH]). We have an isomorphism of M-graded algebras, $\mathbf{k}[X] \simeq A[Y, \mathfrak{D}]$ where

$$A[Y, \mathfrak{D}] := \bigoplus_{m \in \sigma^\vee \cap M} H^0(Y, \mathcal{O}_Y(\lfloor \mathfrak{D}(m) \rfloor))\chi^m.$$

The symbols χ^m satisfy the relations $\chi^0 = 1$ and $\chi^m \cdot \chi^{m'} = \chi^{m+m'}$, for all $m, m' \in \sigma^\vee \cap M$. Conversely, given a presentation $(Y, \sigma, \mathfrak{D})$ the corresponding algebra $A[Y, \mathfrak{D}]$ defines naturally a normal affine variety over $\mathbf{k}$ endowed with an effective $\mathbb{T}$-action with rational quotient Y. When the dimension of Y is 0 (complexity 0 case), we have

$$H^0(Y, \mathcal{O}_Y(\lfloor \mathfrak{D}(m) \rfloor)) = \mathbf{k}$$

for any $m \in \sigma^\vee \cap M$ so that

$$\mathbf{k}[X] \simeq A[Y, \mathfrak{D}] = \bigoplus_{m \in \sigma^\vee \cap M} \mathbf{k}\chi^m,$$

and we recover the classical description of affine toric varieties in terms of strongly convex polyhedral cones. One of the main motivations of the work presented in this thesis is *a generalization of well known results in the toric case (case of* $\dim Y = 0$*) to the context of polyhedral divisors (general case).* More precisely, we are interested in the case where Y is a regular algebraic curve (complexity 1 case). In this context, we reconstruct easily the curve C starting from the algebra $A[C, \mathfrak{D}]$.

This thesis is divided into three parts. In the first part (Chapter 3) we give an explicit description of the normalization of an affine variety endowed with an algebraic torus action of complexity 1 in terms of polyhedral divisors, when the ground field $\mathbf{k}$ is algebraically closed of characteristic 0. This result can be compared with the work of Hochster in the toric case (see [Ho]). As an application we are interested in the theory of integrally closed ideals introduced by Zariski, Lejeune-Jalabert, Teissier, etc. (see [Za, LeTe]). We provide a combinatorial description of homogeneous integrally closed ideals of the algebra $A = A[C, \mathfrak{D}]$, extending the approach of [KKMS]. We obtain under some conditions a normality criterion for homogeneous ideals of A.

Following the computations of the first part, we can show next that the Altmann-Hausen presentation in complexity 1 holds over an arbitrary field. This is done in the second part (Chapter 4). Still over an arbitrary field, the Galois descent of normal affine varieties endowed with an algebraic torus action of complexity 1 is described via a new combinatorial object that we call Galois invariant polyhedral divisor. We study as well other types of multigraded algebras, namely, those defined by a polyhedral divisor over a Dedekind domain.

In the third part (Chapter 5), we describe the Demazure roots in complexity 1 for more general fields following the work of Liendo [Li]. We obtain a generalization in higher dimensions of classical results concerning the quasihomogeneous surfaces [FZ 2] due in particular to Flenner and Zaidenberg.

Warning. The next three chapters arise from a publication (see [La]) and two preprints (see [La 2, LL]). The next two chapters can be read independently. Chapter 5 uses the conventions of Chapter 4. Each chapter is provided with its own detailed introduction.

Chapitre 3

Clôture intégrale et opérations de tores algébriques de complexité un dans les variétés affines

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux algèbres multigraduées de complexité 1 sur un corps algébriquement clos $\mathbf{k}$ de caractéristique zéro.

En utilisant la géométrie convexe développée par Altmann et Hausen nous obtenons des résultats nouveaux sur des questions classiques d'algèbre commutative. Un de nos principaux théorèmes donne une description combinatoire des idéaux intégralement clos en termes de diviseurs polyédraux, voir le théorème 3.6.6. Un autre résultat nous permet de calculer de façon explicite la normalisation d'une variété affine munie d'une opération d'un tore algébrique de complexité un. Nous décrivons aussi la fermeture intégrale des idéaux homogènes, voir les théorèmes 3.4.4 et 3.6.2, et donnons de nouveaux exemples d'idéaux normaux homogènes, voir le théorème 3.7.3.

Donnons deux exemples illustrant notre problématique. Considérons l'algèbre des polynômes de Laurent en n variables

$$L_{[n]} = L_{[n]}(\mathbf{k}) := \mathbf{k}\left[t_1, t_1^{-1}, t_2, t_2^{-1}, \ldots, t_n, t_n^{-1}\right].$$

Notons que $L_{[n]}$ est l'anneau des coordonnées de la variété affine $(\mathbf{k}^{\star})^n$. Soit A une sous-algèbre engendrée par un nombre fini de monômes. Soit $E \subset \mathbb{Z}^n$ le sous-ensemble des exposants correspondant aux monômes apparaissant dans A. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que E engendre le réseau $\mathbb{Z}^n$. Il est connu [Ho] que la normalisation de A est l'ensemble des combinaisons linéaires de tous les monômes dont les exposants appartiennent au cône $\omega \subset \mathbb{Q}^n$ engendré par E. Nous avons donc

$$\bar{A} = \bigoplus_{(m_1,\ldots,m_n)\in\,\omega\cap\mathbb{Z}^n} \mathbf{k}\, t_1^{m_1}\ldots\, t_n^{m_n},$$

où $\bar{A}$ est la normalisation de A. Par exemple, si $n = 1$ et si A est la sous-algèbre engendrée par les monômes t_1^2 et t_1^3 alors la normalisation de A est l'anneau des polynômes $\mathbf{k}[t_1]$.

Un problème analogue apparaît pour les idéaux monomiaux. Supposons que l'algèbre A soit normale. Soit I un idéal de A engendré par des monômes. L'enveloppe convexe dans $\mathbb{Q}^n$ de tous les exposants des monômes de I est un polyèdre P contenu dans le cône ω. Ce polyèdre P satisfait $P + \omega \subset P$. La fermeture intégrale de I est égale à

$$\bar{I} = \bigoplus_{(m_1,\ldots,m_n)\in\, P\cap\mathbb{Z}^n} \mathbf{k}\, t_1^{m_1}\ldots\, t_n^{m_n}.$$

Nous pouvons déterminer P par un ensemble fini de monômes dans A engendrant l'idéal I. Par exemple, si $n = 2$, $A = \mathbb{C}[t_1, t_2]$ et si I est l'idéal engendré par les monômes t_1^3 et t_2^3 alors

$$\bar{I} = \left(t_1^3,\, t_1^2t_2,\, t_1t_2^2,\, t_2^3\right).$$

Voir [LeTe, HS, Va] pour plus de détails concernant la fermeture intégrale des idéaux ; nous rappelons les définitions essentielles ci-dessous. Notons que l'étude des idéaux intégralement clos nous permet de décrire la normalisation d'un éclatement (voir [KKMS] pour le cas torique et [Br] pour le cas sphérique). Cela est aussi utilisé dans le but de décrire les modifications affines équivariantes par les opérations d'un tore algébrique (voir [KZ, Du]).

Par analogie avec le cas monomial présenté ci-dessus, nous considérons le cas plus général des opérations de tores algébriques de complexité 1. Avant de passer à la formulation de nos résultats, rappelons quelques notions.

Un tore algébrique $\mathbb{T}$ de dimension n est un groupe algébrique isomorphe à $(\mathbf{k}^\star)^n$. Soient M le réseau des caractères de $\mathbb{T}$ et A une algèbre affine sur le corps $\mathbf{k}$. Alors se donner une opération algébrique de $\mathbb{T}$ dans $X = \operatorname{Spec} A$ est équivalent à se donner une M-graduation sur A. La complexité de l'algèbre M-graduée affine A est la codimension d'une orbite dans X en position générale. Notons que le cas classique torique correspond au cas de la complexité 0.

Soient A un anneau intègre et I un idéal de A. Un élément $a \in A$ est dit entier sur I s'il existe $r \in \mathbb{Z}_{>0}$ et $c_i \in I^i$, $i = 1, \dots, r$ tels que $a^r + \sum_{i=1}^{r} c_i a^{r-i} = 0$. La fermeture intégrale $\bar{I}$ de l'idéal I est l'ensemble de tous les éléments de A qui sont entiers sur I. Il est connu que le sous-ensemble $\bar{I}$ est un idéal [HS, 1.3.1]. Un idéal I est intégralement clos si $I = \bar{I}$. De plus, I est dit normal si pour tout entier strictement positif e, l'idéal I^e est intégralement clos. Si A est normal alors cette dernière condition est équivalente à la normalité de l'algèbre de Rees $A[It] = A \oplus \bigoplus_{i \geq 1} I^i t^i$. Voir [Ri] pour plus de détails.

Le but de ce chapitre est de répondre aux questions suivantes : étant donnés une algèbre M-graduée affine A de complexité 1 sur $\mathbf{k}$ et des éléments homogènes $a_1, \dots, a_r \in A$ tels que

$$A = \mathbf{k}\,[a_1, \dots,\, a_r]\,,$$

peut-on décrire explicitement la normalisation de A à partir des générateurs $a_1, \dots, a_r$? De plus, si A est normale et si I est un idéal homogène dans A, peut on décrire explicitement la fermeture intégrale de I à partir d'un ensemble fini de générateurs homogènes ? Il existe un lien entre ces deux dernières questions. En fait, la réponse à la seconde question peut être déduite de la première en examinant la normalisation de l'algèbre de Rees $A[It]$ correspondant à l'idéal I.

Pour répondre à la première question, il est utile d'attacher un objet combinatoire approprié à une algèbre M-graduée normale A. Par exemple, dans le cas monomial présenté ci-dessus, si A est normale alors le cône polyédral ω (engendré par les poids de A) nous permet de reconstruire l'algèbre A.

Rappelons qu'une $\mathbb{T}$-variété est une variété normale munie d'une opération fidèle d'un tore algébrique $\mathbb{T}$. Il existe plusieurs descriptions combinatoires des $\mathbb{T}$-variétés affines. Voir [De 2, AH] pour la complexité arbitraire, [KKMS, Ti] pour la complexité 1 et [FZ] pour le cas des surfaces. Notons que la description de [AH] est généralisée dans [AHS] pour des $\mathbb{T}$-variétés. Voir aussi l'article d'exposition [AOPSV] pour des applications concernant la théorie des $\mathbb{T}$-variétés.

Dans ce chapitre, nous utilisons le point de vue de [AH] et de [Ti]. Pour simplifier nous supposons que $M = \mathbb{Z}^n$ et que $\mathbb{T} = (\mathbf{k}^\star)^n$. Une $\mathbb{T}$-variété affine $X = \operatorname{Spec} A$ de complexité 1 peut être décrite par son cône des poids $\omega \subset \mathbb{Q}^n$ et un diviseur polyédral $\mathfrak{D}$ sur une courbe algébrique lisse C, dont les coefficients sont des polyèdres dans $\mathbb{Q}^n$. Pour tout élément $m = (m_1, \dots, m_n)$ de $\omega \cap \mathbb{Z}^n$, nous avons une évaluation $\mathfrak{D}(m)$ appartenant à l'espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ des diviseurs de Weil rationnels sur C. Étant donnée un triplet $(C, \omega, \mathfrak{D})$ on peut construire une algèbre M-graduée

$$A[C, \mathfrak{D}] := \bigoplus_{m \in \omega \cap M} H^0(C, \mathcal{O}_C(\lfloor \mathfrak{D}(m) \rfloor))\chi^m,$$

où χ^m est le monôme de Laurent $t_1^{m_1} \dots t_n^{m_n}$. Voir [AH] pour des définitions et des énoncés précis. Un des principaux résultats de ce chapitre peut être énoncé de la façon suivante (voir le théorème 3.4.4).

Théorème. *Soit C une courbe algébrique lisse. Considérons une sous-algèbre*

$$B = \mathbf{k}[C][f_1\chi^{s_1}, \dots, f_r\chi^{s_r}] \subset L_{[n]}(\mathbf{k}(C)) := \mathbf{k}(C)\left[t_1, t_1^{-1}, \dots, t_n, t_n^{-1}\right]$$

telle que

$$\operatorname{Frac} B = \operatorname{Frac} L_{[n]}(\mathbf{k}(C)),$$

où $s_i \in \mathbb{Z}^n$, χ^{s_i} est le monôme de Laurent correspondant, et $f_i \in \mathbf{k}(C)^\star$. Alors la normalisation de B est l'algèbre $A[C, \mathfrak{D}]$ dont le cône des poids ω est engendré par $s_1, \dots, s_r$ et dont le coefficient du diviseur polyédral $\mathfrak{D}$ au point $z \in C$ est

$$\Delta_z = \{\, v \in \mathbb{Q}^n,\ \langle s_i\,,\, v\rangle \geq -\operatorname{ord}_z f_i,\ i = 1, \dots, r\,\},$$

où $\operatorname{ord}_z f_i$ est l'ordre d'annulation de f_i en z.

Ce théorème répond à la première question. Il généralise des résultats bien connus dans le cas des surfaces munies d'une opération algébrique de $\mathbf{k}^\star$, voir [FZ, 3.9, 4.6]. Notons aussi que ce résultat peut être appliqué

(*) pour trouver un diviseur polyédral propre représentant une sous-algèbre (normale) donnée par un ensemble fini de générateurs homogènes ;

(**) pour trouver un ensemble fini de générateurs d'une algèbre représentée par un diviseur polyédral propre : l'idée est de deviner un ensemble fini de générateurs en appliquant (*).

La réponse à la seconde question est donnée par le théorème 3.6.2. Il est connu que l'ensemble des idéaux intégralement clos homogènes d'une variété torique décrite par son cône des poids ω est en correspondance bijective avec l'ensemble des ω-polyèdres entiers contenus dans ω (voir [KKMS] et la section 3.5). Nous donnons une correspondance analogue pour les idéaux intégralement clos homogènes sur une $\mathbb{T}$-variété affine de complexité 1 (voir le théorème 3.6.6) qui est totalement combinatoire lorsque C est affine (voir le corollaire 3.6.7).

Tout idéal intégralement clos homogène I d'une $\mathbb{T}$-variété affine $X = \operatorname{Spec} A$ de complexité 1 peut être décrit par le biais d'un couple $(P, \widetilde{\mathfrak{D}})$ où P est un polyèdre entier dans $\mathbb{Q}^n$. Ce polyèdre joue le même rôle que le polyèdre de Newton pour le cas monomial. Le diviseur polyédral $\widetilde{\mathfrak{D}}$ correspond à la normalisation de l'algèbre de Rees de I. Nous donnons une interprétation géométrique des coefficients de $\widetilde{\mathfrak{D}}$. Supposons par exemple que le cône des poids de A est saillant, et soit $\widetilde{\Delta}_z$ le coefficient de $\widetilde{\mathfrak{D}}$ au point $z \in C$. Alors le théorème 3.6.6 donne des conditions sur les équations des faces de codimension 1 de $\widetilde{\Delta}_z$ de sorte que $\widetilde{\mathfrak{D}}$ correspond à la normalisation de l'algèbre de Rees $A[It]$.

Nous donnons aussi des conditions suffisantes sur le couple $(P, \widetilde{\mathfrak{D}})$ pour que l'idéal correspondant I soit normal (voir le théorème 3.7.3). Pour le cas des $\mathbf{k}^\star$-surfaces affines qui ne sont pas elliptiques, nous obtenons une démonstration combinatoire de la normalité des idéaux intégralement clos homogènes de ces surfaces. Comme autre application, nous obtenons un nouveau critère de normalité qui généralise le théorème de Reid-Roberts-Vitulli [RRV, 3.1] dans le cas de la complexité 0 (voir 3.7.5).

Théorème. *Soient $n \geq 1$ un entier et $\mathbf{k}^{[n+1]} = \mathbf{k}[x_0, \ldots, x_n]$ l'algèbre des polynômes à $n+1$ variables sur $\mathbf{k}$. Nous munissons $\mathbf{k}^{[n+1]}$ de la $\mathbb{Z}^n$-graduation donnée par l'égalité*

$$\mathbf{k}^{[n+1]} = \bigoplus_{m=(m_1,\ldots,m_n)\in\mathbb{N}^n} A_m, \quad \textit{avec} \;\; A_m = \mathbf{k}[x_0]\, x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n}.$$

Pour un idéal homogène I de $\mathbf{k}^{[n+1]}$, les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) *L'ideal I est normal ;*

(ii) *Pour tout $e \in \{1, \ldots, n\}$, l'idéal I^e est intégralement clos.*

Donnons un court résumé de chaque section de ce chapitre. Dans la section 3.3, nous rappelons quelques faits sur les opérations de tores algébriques de complexité 1 et sur les diviseurs polyédraux. Dans la section 3.4, nous traitons le problème de la normalisation des algèbres multigraduées et montrons le théorème 3.6.6. Dans la section 3.5, nous nous concentrons sur les idéaux monomiaux intégralement clos. Dans la section 3.6, nous étudions la description en termes de couples $(P, \widetilde{\mathfrak{D}})$ pour les idéaux intégralement clos des $\mathbb{T}$-variétés affines de complexité 1. Finalement, dans la dernière section, nous discutons de la normalité des idéaux dans un cas particulier.

Tout au long de ce chapitre $\mathbf{k}$ est un corps algébriquement clos de caractéristique zéro. Par une variété on entend un schéma intègre séparé de type fini sur $\mathbf{k}$.

3.2 Introduction (english version)

In this chapter, we are interested in multigraded affine algebras of complexity 1 over an algebraically closed field $\mathbf{k}$ of characteristic zero.

Using the convex geometry developped by Altmann-Hausen we obtain some new results on classical questions of commutative algebra. One of our main theorems gives a description of integrally closed homogeneous ideals in terms of polyhedral divisors, see Theorem 3.6.6. Another result allows us to compute effectively the normalization of an affine variety with an algebraic torus action of complexity one. We describe as well the integral closure of homogeneous ideals, see Theorem 3.4.4, Theorem 3.6.2 and exhibit new examples of normal homogeneous ideals, see Theorem 3.7.3.

The following two classical examples illustrate well the issues that arise. Consider the algebra of Laurent polynomials in n variables

$$L_{[n]} = L_{[n]}(\mathbf{k}) := \mathbf{k}\left[t_1, t_1^{-1}, t_2, t_2^{-1}, \ldots, t_n, t_n^{-1}\right].$$

Notice that $L_{[n]}$ is the coordinate ring of the affine variety $(\mathbf{k}^\star)^n$. Let A be a subalgebra generated by a finite number of monomials, and let $E \subset \mathbb{Z}^n$ be the subset of exponents corresponding to the monomials of A. Without loss of generality, we may suppose that E generates the lattice $\mathbb{Z}^n$. It is known [Ho] that the normalization of A is the set of linear combinations of all monomials with their exponents belonging to the rational cone $\omega \subset \mathbb{Q}^n$ generated by E. We have

$$\bar{A} = \bigoplus_{(m_1,\ldots,m_n)\in\,\omega\cap\mathbb{Z}^n} \mathbf{k}\, t_1^{m_1}\ldots\, t_n^{m_n}$$

where $\bar{A}$ is the normalization of A. For instance, if $n = 1$ and if A is the subalgebra generated by the monomials t_1^2 and t_1^3 then the normalization of A is the polynomial ring $\mathbf{k}[t_1]$.

A similar problem arises for monomial ideals. Assume that the algebra A is normal. Let I be an ideal of A generated by monomials. The convex hull in $\mathbb{Q}^n$ of all exponents appearing in I is a polyhedron P contained in ω. This polyhedron P satisfies $P+\omega \subset P$. The integral closure of I is equal to

$$\bar{I} = \bigoplus_{(m_1,\ldots,m_n)\in\, P\cap\mathbb{Z}^n} \mathbf{k}\, t_1^{m_1}\ldots\, t_n^{m_n}.$$

We can determine P by means of a finite system of monomials generating the ideal I. For instance, if $n = 2$, $A = \mathbb{C}[t_1, t_2]$ and if I is the ideal generated by the monomial t_1^3 and t_2^3 then

$$\bar{I} = \left(t_1^3,\, t_1^2 t_2,\, t_1 t_2^2,\, t_2^3\right).$$

See [LeTe, HS, Va] for more details concerning the integral closure of ideals; we recall below the definition. Note that the study of integrally closed ideals allows us to find the normalization of a blowing-up (see [KKMS] for toric varieties and [Br] for spherical varieties). This is used as well in order to describe ($\mathbb{T}$-equivariant) affine modifications (see [KZ, Du]).

By analogy with the monomial case presented above, we address more generally the actions of algebraic tori of complexity 1. Before formulating our results, let us recall some notation.

An algebraic torus $\mathbb{T}$ of dimension n is an algebraic group isomorphic to $(\mathbf{k}^\star)^n$. Let M be the character lattice of $\mathbb{T}$, and let A be an affine algebra over $\mathbf{k}$. Defining an algebraic action of $\mathbb{T}$ on $X = \operatorname{Spec} A$ is the same as defining an M-grading of A. The complexity of the affine M-graded algebra A is the codimension of a general $\mathbb{T}$-orbit in X. Note that the classical toric case corresponds to the complexity 0 case.

Let A be a domain and let I be an ideal of A. An element $a \in A$ is said to be integral over I if there exist $r \in \mathbb{Z}_{>0}$ and $c_i \in I^i$, $i = 1, \dots, r$ such that $a^r + \sum_{i=1}^{r} c_i a^{r-i} = 0$. The integral closure $\bar{I}$ of the ideal I is the set of all elements of A that are integral over I. It is known that $\bar{I}$ is an ideal [HS, 1.3.1]. An ideal I is integrally closed if $I = \bar{I}$. Furthermore, I is said to be normal if for any positive integer e, the ideal I^e is integrally closed. If A is normal then this latter condition is equivalent to the normality of the Rees algebra $A[It] = A \oplus \bigoplus_{i \geq 1} I^i t^i$. See [Ri] for more details.

The purpose of this paper is to answer the following questions : given an affine M-graded algebra A of complexity 1 over $\mathbf{k}$ and homogeneous elements $a_1, \dots, a_r \in A$ such that

$$A = \mathbf{k}\,[a_1, \dots,\, a_r]\,,$$

can one describe explicitly the normalization of A in terms of the generators $a_1, \dots, a_r$? Furthermore if A is normal and if I is a homogenous ideal in A, can one describe effectively the integral closure of I in terms of a given finite system of homogeneous generators of I? There exists a connection between these two questions. Indeed the answer to the second can be deduced from that to the first by examining the normalization of the Rees algebra $A[It]$ corresponding to I.

To answer the first question, it is useful to attach an appropriate combinatorial object to a given normal M-graded algebra A. For instance, in the monomial case if A is normal then the rational cone ω allows us to reconstruct A.

Recall that a $\mathbb{T}$-variety is a normal variety endowed with an effective algebraic $\mathbb{T}$-action. There exists several combinatorial descriptions of affine $\mathbb{T}$-varieties. See [De 2, AH] for arbitrary complexity, [KKMS, Ti] for complexity 1 and [FZ] for the case of surfaces. Note that the description of [AH] is generalized in [AHS] to non-affine

$\mathbb{T}$-varieties. See also the survey article [AOPSV] for applications of the theory of $\mathbb{T}$-varieties.

In this chapter, we use the point of view of [AH] and [Ti]. To simplify things we assume that $M = \mathbb{Z}^n$ and $\mathbb{T} = (\mathbf{k}^\star)^n$. An affine $\mathbb{T}$-variety $X = \operatorname{Spec} A$ of complexity 1 can be described by its weight cone $\omega \subset \mathbb{Q}^n$ and by a polyhedral divisor $\mathfrak{D}$ on a smooth algebraic curve C, whose coefficients are polyhedra in $\mathbb{Q}^n$. For any element $m = (m_1, \ldots, m_n)$ of $\omega \cap \mathbb{Z}^n$, we have an evaluation $\mathfrak{D}(m)$ belonging to the $\mathbb{Q}$-linear space of rational Weil divisors on C. Given a combinatorial data $(C, \omega, \mathfrak{D})$ one can construct an M-graded algebra

$$A[C, \mathfrak{D}] := \bigoplus_{m \in \omega \cap M} H^0(C, \mathcal{O}_C(\lfloor \mathfrak{D}(m) \rfloor))\chi^m,$$

where χ^m is the Laurent monomial $t_1^{m_1} \ldots t_n^{m_n}$. See [AH] for definitions and specific statements. One of the main results of this paper can be stated as follows (see Theorem 3.4.4).

Theorem. *Let C be a smooth algebraic curve. Consider a subalgebra*

$$B = \mathbf{k}[C][f_1\chi^{s_1}, \ldots, f_r\chi^{s_r}] \subset L_{[n]}(\mathbf{k}(C)) := \mathbf{k}(C)\left[t_1, t_1^{-1}, \ldots, t_n, t_n^{-1}\right]$$

such that

$$\operatorname{Frac} B = \operatorname{Frac} L_{[n]}(\mathbf{k}(C)),$$

where $s_i \in \mathbb{Z}^n$, χ^{s_i} is the corresponding Laurent monomial, and $f_i \in \mathbf{k}(C)^\star$. Then the normalization of B is the algebra $A[C, \mathfrak{D}]$ with weight cone ω generated by $s_1, \ldots, s_r$ and with the following coefficient of the polyhedral divisor $\mathfrak{D}$ at the point $z \in C$:

$$\Delta_z = \{\, v \in \mathbb{Q}^n,\ \langle s_i\,,\, v\rangle \geq -\operatorname{ord}_z f_i,\ i = 1, \ldots, r \,\},$$

where $\operatorname{ord}_z f_i$ is the order of f_i at z.

This theorem answers the first question. It generalizes well known results for the case of affine surfaces with $\mathbf{k}^\star$-actions [FZ, 3.9, 4.6]. Note also that it may be applied

(*) to find a proper polyhedral divisor representing a (normal) subalgebra given by generators ;

(**) to find generators of an algebra represented by a proper polyhedral divisor : the idea is to guess some generating set and apply (*).

The answer to the second question is given by Theorem 3.6.2. It is known that the set of integrally closed homogeneous ideals of the affine toric variety with weight cone ω is in bijective correspondence with the set of integral ω-polyhedra contained in ω (see [KKMS] and section 3.5). We provide a similar correspondence for integrally closed homogeneous ideals on affine $\mathbb{T}$-variety of complexity 1 (see Theorem 3.6.6) that is wholly combinatorial when C is affine (see Corollary 3.6.7).

Any integrally closed homogeneous ideal I of an affine $\mathbb{T}$-variety $X = \operatorname{Spec} A$ of complexity 1 can be described by means of a pair $(P, \widetilde{\mathfrak{D}})$ where P is an integral polyhedron in $\mathbb{Q}^n$. This polyhedron plays the same role as the Newton polyhedron does in the monomial case. The polyhedral divisor $\widetilde{\mathfrak{D}}$ corresponds to the normalization of the Rees algebra of I. We give a geometric interpretation of the coefficients of $\widetilde{\mathfrak{D}}$. Assume for instance that the weight cone of A is strongly convex, and let $\widetilde{\Delta}_z$ be the coefficient of $\widetilde{\mathfrak{D}}$ at a point $z \in C$. Then Theorem 3.6.6 provides conditions on the equations of facets of $\widetilde{\Delta}_z$ so that $\widetilde{\mathfrak{D}}$ corresponds to the normalization of the Rees algebra $A[It]$.

We provide as well sufficient conditions on $(P, \widetilde{\mathfrak{D}})$ in order for I be normal (see Theorem 3.7.3). For the case of non-elliptic affine $\mathbf{k}^\star$-surfaces, we obtain a combinatorial proof for the normality of any integrally closed invariant ideals of such surfaces. As another application, we obtain the following new criterion of normality which generalizes Reid-Roberts-Vitulli's Theorem [RRV, 3.1] in the case of complexity 0 (see 3.7.5).

Theorem. *Let $n \geq 1$ be an integer and let $\mathbf{k}^{[n+1]} = \mathbf{k}[x_0, \ldots, x_n]$ be the algebra of polynomials in $n+1$ variables over $\mathbf{k}$. We endow $\mathbf{k}^{[n+1]}$ with the $\mathbb{Z}^n$-grading given by*

$$\mathbf{k}^{[n+1]} = \bigoplus_{m=(m_1,\ldots,m_n)\in\mathbb{N}^n} A_m, \quad \textit{where} \quad A_m = \mathbf{k}[x_0]\, x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n}.$$

For a homogeneous ideal I of $\mathbf{k}^{[n+1]}$ the following are equivalent.

(i) *The ideal I is normal;*

(ii) *For any $e \in \{1, \ldots, n\}$, the ideal I^e is integrally closed.*

Let us give a brief summary of the contents of each section. In Section 3.3, we recall some notions on tori actions of complexity 1 and on polyhedral divisors of Altmann-Hausen. In Section 3.4, we treat the normalization problem for multigraded algebras and show Theorem 3.4.4. Section 3.5 focuses on integrally closed monomial ideals. In Section 3.6, we study the description in terms of the pairs $(P, \widetilde{\mathfrak{D}})$ for integrally closed homogeneous ideals of affine $\mathbb{T}$-varieties. Finally, in the last section, we discuss the problem of normality in a special class.

Throughout this paper $\mathbf{k}$ is an algebraically closed field of characteristic zero. By a variety we mean an integral separated scheme of finite type over $\mathbf{k}$.

3.3 $\mathbb{T}$-variétés affines de complexité un et géométrie convexe

Nous rappelons ici les notions fondamentales sur les opérations de tores algébriques dont nous aurons besoin par la suite.

3.3.1. Soit N un réseau de rang n et $M = \operatorname{Hom}(N, \mathbb{Z})$ son réseau dual. On note $N_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} N$ et $M_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M$ les $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels duaux associés. Au réseau M, on associe un tore algébrique $\mathbb{T}$ de dimension n dont l'algèbre des fonctions régulières est définie par

$$\mathbf{k}[\mathbb{T}] = \bigoplus_{m \in M} \mathbf{k}\,\chi^m.$$

La famille $(\chi^m)_{m \in M}$ satisfait les relations $\chi^m \cdot \chi^{m'} = \chi^{m+m'}$, pour tous $m, m' \in M$. Le choix d'une base de M donne un isomorphisme entre $\mathbf{k}[\mathbb{T}]$ et l'algèbre des polynômes de Laurent à n variables. Chaque fonction χ^m s'interprète comme un caractère de $\mathbb{T}$ et tous les caractères s'obtiennent ainsi.

3.3.2. Soit X une variété affine et supposons que $\mathbb{T}$ opère algébriquement dans X. Alors cela induit une opération de $\mathbb{T}$ dans $A := \mathbf{k}[X]$ définie par $(t \cdot f)(x) = f(t \cdot x)$ avec $t \in \mathbb{T}$, $f \in \mathbf{k}[X]$ et $x \in X$, faisant du $\mathbf{k}$-espace vectoriel A un $\mathbb{T}$-module rationnel. Le $\mathbb{T}$-module A admet une décomposition $A = \bigoplus_{m \in M} A_m$ en somme directe de sous-espaces vectoriels où pour tout $m \in M$,

$$A_m = \{f \in A \,|\, \forall t \in \mathbb{T},\, t \cdot f = \chi^m(t) f\}\ .$$

L'algèbre A est ainsi munie d'une M-graduation. Réciproquement, toute M-graduation de la $\mathbf{k}$-algèbre A est obtenue par une opération algébrique de $\mathbb{T}$ dans $X = \operatorname{Spec} A$. La partie

$$S := \{m \in M \,|\, A_m \neq \{0\}\}$$

de M contenant 0 et stable par l'addition est appelée *monoïde des poids* de A. Puisque A est de type fini sur $\mathbf{k}$, l'ensemble S engendre un cône polyédral $\omega \subset M_{\mathbb{Q}}$ dit *cône des poids* de A.

L'opération de $\mathbb{T}$ dans X est fidèle si et seulement si S n'est pas contenu dans un sous-réseau propre de M. Dans ce cas, le cône ω est de dimension n et il existe un unique cône polyédral saillant $\sigma \subset N_{\mathbb{Q}}$ tel que

$$\omega = \{m \in M_{\mathbb{Q}} \,|\, \forall v \in \sigma,\, m(v) \geq 0\}\ .$$

On dit que ω est le *cône dual* de σ. On le note $\sigma^{\vee}$. Une $\mathbb{T}$*-variété* est une variété normale munie d'une opération algébrique fidèle de $\mathbb{T}$.

3.3.3. Considérons le sous-corps $\mathbf{k}(X)^{\mathbb{T}}$ des fonctions rationnelles $\mathbb{T}$-invariantes sur X. Nous appelons *complexité* de l'opération de $\mathbb{T}$ dans $X = \operatorname{Spec} A$, le degré de transcendance de l'extension de corps $\mathbf{k}(X)^{\mathbb{T}}/\mathbf{k}$. La complexité s'interprète géométriquement comme la codimension d'une orbite en position générale. Lorsque l'opération est fidèle, elle est égale à $\dim X - \dim \mathbb{T}$. Elle fut introduite dans [LV] pour les opérations de groupes algébriques réductifs dans les espaces homogènes.

Les $\mathbb{T}$-variétés affines de complexité 0 sont les *variétés toriques affines*. Elles admettent une description bien connue en terme de cônes polyédraux saillants. Pour plus d'informations, voir [CLS, Da, Fu, Od].

Etant donnés un sous-monoïde $E \subset M$ et un corps K_0, nous notons

$$K_0[E] = \bigoplus_{m\in E} K_0\,\chi^m.$$

l'algèbre du monoïde E sur le corps K_0. Pour tout cône polyédral $\tau \subset M_{\mathbb{Q}}$, nous écrivons $\tau_M := \tau \cap M$.

Nous rappelons une description combinatoire des $\mathbb{T}$-variétés affines de complexité 1 obtenue dans [AH, Ti]. Voir [FZ] pour la présentation de Dolgachev-Pinkham-Demazure (*D.P.D.*) des $\mathbb{C}^{\star}$-surfaces affines complexes. Notons que l'approche donnée dans [Ti] provient d'une description antérieure des opérations de groupes algébriques réductifs de complexité 1 [Ti 2]. Dans [Vol], on donne un lien entre [AH] et la description classique de [KKMS].

3.3.4. Soit C une courbe algébrique lisse et $\sigma \subset N_{\mathbb{Q}}$ un cône polyédral saillant. Une partie $\Delta \subset N_{\mathbb{Q}}$ est un σ*-polyèdre* si Δ est somme de Minkowski de σ et d'un polytope

$Q \subset N_{\mathbb{Q}}$. On note $\mathrm{Pol}_\sigma(N_{\mathbb{Q}})$ le monoïde abélien des σ-polyèdres de loi la somme de Minkowski et d'élément neutre σ.

Pour $\Delta \in \mathrm{Pol}_\sigma(N_{\mathbb{Q}})$, on définit la fonction $h_\Delta : \sigma^\vee \to \mathbb{Q}$ par $h_\Delta(m) = \min_{v\in\Delta} m(v)$, pour tout $m \in \sigma^\vee$. On dit que h_Δ est la *fonction de support* de Δ. Elle est identiquement nulle si et seulement si $\Delta = \sigma$. Pour tous $m, m' \in \sigma^\vee$, on a l'inégalité de sous-additivité

$$h_\Delta(m) + h_\Delta(m') \leq h_\Delta(m + m'). \tag{3.1}$$

Un *diviseur σ-polyédral* sur C est une somme formelle

$$\mathfrak{D} = \sum_{z\in C} \Delta_z \,.\, z$$

où chaque Δ_z appartient à $\mathrm{Pol}_\sigma(N_{\mathbb{Q}})$ avec pour presque [1] tout $z \in C$, $\Delta_z = \sigma$. On note $\mathrm{supp}(\mathfrak{D})$, dit *support* de $\mathfrak{D}$, l'ensemble des points $z \in C$ tels que $\Delta_z \neq \sigma$. On dit que $\mathfrak{D}$ est *propre* lorsque pour tout $m \in \sigma_M^\vee$, l'évaluation

$$\mathfrak{D}(m) := \sum_{z\in C} h_{\Delta_z}(m) \,.\, z$$

est un diviseur de Cartier rationnel semi-ample et abondant (big) pour m appartenant à l'intérieur relatif de $\sigma^\vee$.

3.3.5. La propreté de $\mathfrak{D}$ est décrite en distinguant les deux cas suivants [AH, 2.12].

(i) Lorsque C est une courbe projective lisse, le diviseur polyédral $\mathfrak{D}$ est propre si et seulement si pour tout vecteur $m \in \sigma_M^\vee$, on a $\deg(\mathfrak{D}(m)) \geq 0$ et si $\deg(\mathfrak{D}(m)) = 0$ alors m appartient au bord de $\sigma^\vee$ et un multiple non nul de $\mathfrak{D}(m)$ est principal ;

(ii) Lorsque C est une courbe affine lisse, aucune condition n'est imposée sur l'évaluation de $\mathfrak{D}$.

Notation 3.3.6. D'après l'inégalité (3.1) dans 3.3.4, si $\mathfrak{D}$ est un diviseur σ-polyédral sur C alors pour tous vecteurs $m, m' \in \sigma_M^\vee$, l'application

$$H^0(C, \mathcal{O}_C(\lfloor \mathfrak{D}(m) \rfloor)) \times H^0(C, \mathcal{O}_C(\lfloor \mathfrak{D}(m') \rfloor)) \to H^0(C, \mathcal{O}_C(\lfloor \mathfrak{D}(m+m') \rfloor)),\ (f, g) \mapsto f \cdot g$$

est bien définie. Le $\mathbb{T}$-module

$$A[C, \mathfrak{D}] := \bigoplus_{m\in\sigma_M^\vee} H^0(C, \mathcal{O}_C(\lfloor \mathfrak{D}(m) \rfloor))\chi^m,$$

est donc une algèbre M-graduée. On la notera $A[\mathfrak{D}]$ lorsque la mention de C est claire. Pour tout élément homogène $f\chi^m$ de $\mathbf{k}(C)[M]$, nous sous-entendons que $f \in k(C)^\star$ et que χ^m est un caractère du tore $\mathbb{T}$.

1. Cela signifie qu'il existe un sous-ensemble fini $F \subset C$ tel que pour tout $z \in C - F$, $\Delta_z = \sigma$.

Le théorème suivant décrit les algèbres affines normales M-graduées de complexité 1 et de cône des poids $\sigma^\vee$ (voir [AH, Ti]).

Théorème 3.3.7. (i) *Si $\mathfrak{D}$ est un diviseur σ-polyédral propre sur une courbe algébrique lisse C alors l'algèbre multigraduée $A = A[C, \mathfrak{D}]$ est normale, de type fini sur $\mathbf{k}$ et sa M-graduation fait de $X = \operatorname{Spec} A$ une $\mathbb{T}$-variété de complexité 1. Réciproquement, l'algèbre des fonctions régulières de toute $\mathbb{T}$-variété affine de complexité 1 est isomorphe comme algèbre M-graduée à $A[C, \mathfrak{D}]$, où C est une courbe algébrique lisse et $\mathfrak{D}$ est un diviseur polyédral propre sur C.*

(ii) *Plus précisément, toute sous-algèbre multigraduée $A \subset \mathbf{k}(C)[M]$ normale, de type fini sur $\mathbf{k}$, satisfaisant $A_0 = \mathbf{k}[C]$, de même corps des fractions que A et ayant $\sigma^\vee$ pour cône des poids, est égale à $A[C, \mathfrak{D}]$ pour un unique diviseur σ-polyédral $\mathfrak{D}$ propre sur C. Compte tenu des hypothèses ci-dessus, l'algèbre A détermine de façon canonique la courbe C.*

Notation 3.3.8. Si $\mathfrak{D}$ est un diviseur polyédral propre sur C alors on note par $X[C, \mathfrak{D}]$ la $\mathbb{T}$-variété affine $\operatorname{Spec} A[C, \mathfrak{D}]$ correspondante.

L'assertion suivante est connue [AH, §8], [Li, Theorem 1.4(3)]. Elle permet de comparer deux données combinatoires $(C, \sigma, \mathfrak{D})$ et $(C', \sigma', \mathfrak{D}')$ donnant des $\mathbf{k}$-algèbres M-graduées isomorphes.

Théorème 3.3.9. *Soient C, C' des courbes algébriques lisses et $\mathfrak{D}, \mathfrak{D}'$ des diviseurs polyédraux propres respectivement sur C, C' selon des cônes polyédraux saillants $\sigma, \sigma' \subset N_{\mathbb{Q}}$. Alors $X[C, \mathfrak{D}]$ et $X[C', \mathfrak{D}']$ sont $\mathbb{T}$-isomorphes si et seulement si il existe un automorphisme de réseau $F : N \to N$ tel que*[2] *$F_{\mathbb{Q}}(\sigma) = \sigma'$, un isomorphisme $\phi : C \to C'$ de courbes algébriques, $v_1, \ldots, v_r \in N$ et $f_1, \ldots, f_r \in k(C)^\star$ tels que pour tout $m \in \sigma'^\vee_M$,*

$$\phi^\star(\mathfrak{D}')(m) = F_\star(\mathfrak{D})(m) + \sum_{i=1}^{r} m(v_i) \cdot \operatorname{div}(f_i)$$

avec

$$\mathfrak{D} = \sum_{z \in C} \Delta_z \,.\, z, \ \mathfrak{D}' = \sum_{z' \in C'} \Delta'_{z'} \,.\, z', \ \phi^\star(\mathfrak{D}') = \sum_{z' \in C'} \Delta'_{z'} \,.\, \phi^{-1}(z') \text{ et}$$

$$F_\star(\mathfrak{D}) = \sum_{z \in C} (F_{\mathbb{Q}}(\Delta_z) + \sigma) \,.\, z.$$

2. Un automorphisme de réseau $F : N \to N$ induit un automorphisme de l'espace vectoriel $N_{\mathbb{Q}}$ que l'on note $F_{\mathbb{Q}}$.

La proposition suivante montre que la fonction de support d'un σ-polyèdre est linéaire par morceaux. La démonstration de ce résultat est aisée et laissée aux lecteurs.

Lemme 3.3.10. *Soit $\sigma \subset N_{\mathbb{Q}}$ un cône polyédral saillant, $\Delta \in \mathrm{Pol}_{\sigma}(N_{\mathbb{Q}})$ un polyèdre et $S \subset \Delta$ une partie non vide. Notons $V(\Delta)$ l'ensemble des sommets de Δ. Alors $\Delta = \mathrm{Conv}(S) + \sigma$ si et seulement si pour tout $m \in \sigma^{\vee}$, $h_{\Delta}(m) = \min_{v\in S} m(v)$. En particulier, pour tout $m \in \sigma^{\vee}$, on a $h_{\Delta}(m) = \min_{v\in V(\Delta)} m(v)$.*

La terminologie suivante est classique pour les $\mathbb{C}^{\star}$-surfaces affines complexes [FZ]. Elle est introduite dans [Li] pour les $\mathbb{T}$-variétés affines de complexité 1.

Définition 3.3.11. Soit X une variété affine. Une opération algébrique de $\mathbb{T}$ de complexité 1 dans X est dite *elliptique* si l'algèbre multigraduée correspondante

$$A = \mathbf{k}[X] = \bigoplus_{m\in M} A_m \text{ avec } A_m = \{f \in A \,|\, \forall t \in \mathbb{T},\ t\cdot f = \chi^m(t)f\}$$

vérifie $A_0 = \mathbf{k}$. Dans ce cas, on dit que l'algèbre M-graduée A est elliptique.

Remarque 3.3.12. Considérons $A = A[C, \mathfrak{D}]$. Alors A est elliptique si et seulement si C est projective. L'ellipticité de A donne des contraintes géométriques sur la variété $X = \mathrm{Spec}\, A$. En effet, si C est affine alors X est toroïdale [KKMS] et n'admet donc que des singularités toriques. Tandis que lorsque C est projective de genre $g \geq 1$, la variété X a au moins une singularité qui n'est pas rationnelle [LS, Propositions 5.1, 5.5].

La proposition suivante peut être vue comme une généralisation de [FZ, Lemma 1.3(a)].

Proposition 3.3.13. *Soit X une $\mathbb{T}$-variété affine de complexité 1 et notons $\sigma \subset N_{\mathbb{Q}}$ le dual du cône des poids de l'algèbre multigraduée*

$$A = \mathbf{k}[X] = \bigoplus_{m\in M} A_m \text{ avec } A_m = \{f \in A \,|\, \forall t \in T,\ t\cdot f = \chi^m(t)f\}$$

obtenue par l'opération de $\mathbb{T}$. Les assertions suivantes sont vraies.

(i) *Si l'opération de $\mathbb{T}$ n'est pas elliptique alors le monoïde des poids de $\mathbf{k}[X]$ est $\sigma_M^{\vee}$ et pour tout $m \in \sigma_M^{\vee}$, le A_0-module A_m est localement libre de rang 1 ;*

(ii) *Si l'opération est elliptique alors $\sigma \neq \{0\}$;*

(iii) *L'intersection du sous-ensemble*

$$L = \{m \in \sigma_M^{\vee} \,|\, A_m = \{0\}\} \subset M_{\mathbb{Q}}$$

avec toute droite vectorielle rencontrant l'intérieur relatif de $\sigma^{\vee}$ est finie.

Démonstration. Si l'opération de $\mathbb{T}$ n'est pas elliptique alors par le théorème 3.3.7, on peut supposer qu'il existe une courbe algébrique affine lisse C et un diviseur σ-polyédral propre $\mathfrak{D}$ sur C tels que pour tout $m \in \sigma_M^\vee$,

$$A_m = H^0(C, \mathcal{O}_C(\lfloor \mathfrak{D}(m) \rfloor))\chi^m \quad \text{et} \quad \mathbf{k}[X] = \bigoplus_{m \in \sigma_M^\vee} A_m. \tag{3.2}$$

Comme C est affine, pour tout $m \in \sigma_M^\vee$, on a $A_m \neq \{0\}$. D'où l'assertion (i).

Si l'opération est elliptique alors on peut supposer que $\mathbf{k}[X]$ vérifie (3.2) avec C une courbe projective lisse de genre g. Si $\sigma = \{0\}$ alors $\sigma^\vee = M_\mathbb{Q}$. Pour tout $m \in \sigma_M^\vee$, on a par propreté : $\deg(\mathfrak{D}(m)) > 0$. L'égalité $\mathfrak{D}(0) = 0$ donne une contradiction. D'où l'assertion (ii).

Soit $m \in \sigma_M^\vee$ appartenant à l'intérieur relatif de $\sigma^\vee$. Alors il existe $r_0 \in \mathbb{Z}_{>0}$ tel que pour tout $z \in \mathrm{supp}(\mathfrak{D})$ et tout sommet v de Δ_z, $r_0 v \in N$. Ainsi, par le lemme 3.3.10,

$$\mathfrak{D}(r_0 m) = \lfloor \mathfrak{D}(r_0 m)) \rfloor. \tag{3.3}$$

Par la propreté de $\mathfrak{D}$, on peut supposer que

$$\deg(\mathfrak{D}(r_0 m)) = \deg(\lfloor \mathfrak{D}(r_0 m) \rfloor) > d + g - 1$$

où d est le cardinal de $\mathrm{supp}(\mathfrak{D})$. Donc pour tout $r \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \deg(\lfloor \mathfrak{D}((r_0 + r)m) \rfloor) &= \deg(\lfloor \mathfrak{D}(r_0 m) \rfloor) + \deg(\lfloor \mathfrak{D}(rm) \rfloor) \\ &\geq \deg(\lfloor \mathfrak{D}(r_0 m) \rfloor) - d > g - 1. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Comme $\sigma \neq \{0\}$, la demi-droite $\mathbb{Q}_{\leq 0} \cdot m$ ne rencontre $\sigma^\vee$ qu'en l'origine [CLS, Exercice 1.2.4]. Par le théorème de Riemann-Roch, (3.4) donne l'inclusion

$$\mathbb{Q} \cdot m \cap L \subset \{0, m, 2m, \ldots, (r_0 - 1)m\}.$$

D'où le résultat. □

Remarque 3.3.14. Notons $\sigma = \mathbb{Q}_{\geq 0}^2$. L'exemple du diviseur polyédral propre

$$\mathfrak{D} = \Delta_0 \cdot 0 + \Delta_1 \cdot 1 + \Delta_\infty \cdot \infty, \;\; \Delta_0 = \left(\frac{1}{2}, 0\right) + \sigma, \;\; \Delta_1 = \left(-\frac{1}{2}, 0\right) + \sigma,$$

$$\Delta_\infty = [(1,0), (0,1)] + \sigma,$$

sur $\mathbb{P}^1$ montre qu'en général, il existe des demi-droites vectorielles contenues dans le bord de $\sigma^\vee$ qui rencontrent L en une infinité de points. En effet, dans cet exemple, pour tout $r \in \mathbb{N}$, on a

$$H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\lfloor \mathfrak{D}(2r+1, 0) \rfloor))\chi^{(2r+1,0)} = \{0\}.$$

3.4 Normalisation des algèbres affines multigraduées de complexité un

Le but de cette section est de décrire explicitement la normalisation des algèbres affines multigraduées de complexité 1.

Dans le cas de la complexité 0, toute algèbre M-graduée affine est réalisée comme sous-algèbre $\mathbb{T}$-stable de $\mathbf{k}[M]$. La normalisation de A est déterminée par son cône des poids [Ho]. De façon analogue, toute algèbre M-graduée affine de complexité 1 est plongée dans une algèbre $\mathbf{k}(C)[M]$ où C est une courbe algébrique lisse. Nous rappelons ceci dans le paragraphe suivant.

3.4.1. Soit $A = \bigoplus_{m\in M} A_m$ une algèbre M-graduée intègre de type fini sur $\mathbf{k}$. Notons K son corps des fractions. On suppose que $\mathrm{tr.deg}_{\mathbf{k}}\, K^{\mathbb{T}} = 1$. Sans perte de généralité, on peut supposer que la M-graduation de A est fidèle. Alors pour tout vecteur $m \in M$,

$$K_m := \{f/g \,|\, \exists e,\ f \in A_{m+e},\ g \in A_e,\ g \neq 0\} \subset K$$

est un sous-espace vectoriel de dimension 1 sur $K_0 = K^{\mathbb{T}}$. Le choix d'une base de M nous permet de construire une famille $(\chi^m)_{m\in M}$ d'éléments de $K^\star$ vérifiant pour tous $m, m' \in M$,

$$K_m = K_0\, \chi^m \quad \text{et} \quad \chi^m \cdot \chi^{m'} = \chi^{m+m'}.$$

Quitte à remplacer A_0 par $\bar{A}_0$, on peut supposer que A_0 est normale. Notons que l'algèbre A_0 est de type fini sur $\mathbf{k}$. Soit $\widetilde{C}$ la courbe complète lisse sur $\mathbf{k}$ obtenue à partir de l'ensemble des valuations discrètes de $K_0/\mathbf{k}$, de sorte que $K_0 = \mathbf{k}(\widetilde{C})$.

Si l'opération de $\mathbb{T}$ dans $X = \mathrm{Spec}\, A$ n'est pas elliptique alors K_0 est le corps des fractions de A_0. En effet, si $b \in K_0$ alors b est un élément algébrique sur $\mathrm{Frac}\, A_0$. Il existe donc $a \in A_0$ non nul tel que ab soit entier sur A_0. Par normalité de A_0, on a $ab \in \bar{A} \cap K_0 = A_0$ et donc $K_0 \subset \mathrm{Frac}\, A_0$. L'inclusion réciproque est immédiate. Dans tous les cas, il existe un unique ouvert non vide $C \subset \widetilde{C}$ tel que

$$A_0 = \mathbf{k}[C] \quad \text{et} \quad A \subset \bigoplus_{m\in M} K_m = \mathbf{k}(C)[M]\,.$$

Par le théorème 3.3.7, l'égalité $K = \mathrm{Frac}\, \mathbf{k}(C)[M]$ implique que $\bar{A} = A[C, \mathfrak{D}]$, pour un unique diviseur polyédral propre $\mathfrak{D} = \sum_{z\in C} \Delta_z \cdot z$.

Fixons un système de générateurs homogènes

$$A = \mathbf{k}[C][f_1\chi^{m_1}, \dots, f_r\chi^{m_r}]$$

avec $f_1, \dots, f_r$ des fonctions rationnelles non nulles sur C et $m_1, \dots, m_r$ des éléments de M. Il s'agit de déterminer les polyèdres Δ_z en fonction de $((f_1, m_1), \dots, (f_r, m_r))$. Dans [FZ], on donne la présentation [3] *D.P.D.* de $\bar{A}$ pour le cas des surfaces affines complexes avec opération parabolique ou hyperbolique de $\mathbb{C}^\star$. Nous rappelons ces résultats dans le corollaire 3.4.7.

Le lemme élémentaire suivant sera utilisé dans la preuve du théorème 3.4.4. La démonstration de ce résultat est laissée aux lecteurs.

Lemme 3.4.2. *Soient $\sigma \subset N_\mathbb{Q}$ un cône polyédral saillant et $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathrm{Pol}_\sigma(N_\mathbb{Q})$ des σ-polyèdres. Alors $\Delta_1 = \Delta_2$ si et seulement si pour tout $m \in \sigma^\vee_M$ appartenant à l'intérieur relatif de $\sigma^\vee$, $h_{\Delta_1}(m) = h_{\Delta_2}(m)$.*

Notation 3.4.3. Soient C une courbe algébrique lisse et $f = (f_1\chi^{m_1}, \dots, f_r\chi^{m_r})$ un r-uplet d'éléments homogènes de $\mathbf{k}(C)[M]$ tels que $\sum_{i=1}^r \mathbb{Q}\, m_i = M_\mathbb{Q}$. Posons $\sigma \subset N_\mathbb{Q}$ le cône polyédral saillant dual de $\sum_{i=1}^r \mathbb{Q}_{\geq 0}\, m_i$ et pour tout $z \in C$, considérons $\Delta_z[f] \subset N_\mathbb{Q}$ le σ-polyèdre défini par les inégalités

$$m_i \geq -\mathrm{ord}_z\, f_i, \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

On note $\mathfrak{D}[f]$ le diviseur σ-polyédral $\sum_{z\in C} \Delta_z[f]\,.\,z$.

Dans le théorème suivant, nous décrivons la normalisation de l'algèbre A donnée dans 3.4.1.

Théorème 3.4.4. *Soient C une courbe algébrique lisse et*

$$A = \mathbf{k}[C][f_1\chi^{m_1}, \dots, f_r\chi^{m_r}] \subset \mathbf{k}(C)[M]$$

une sous-algèbre $\mathbb{T}$-stable engendrée par des éléments homogènes $f_1\chi^{m_1}, \dots, f_r\chi^{m_r}$. Supposons que A a le même corps des fractions que $\mathbf{k}(C)[M]$ et soit $\bar{A}$ la normalisation de A, vue comme sous-algèbre de $\mathbf{k}(C)[M]$. Considérons $\mathfrak{D}[f]$ défini comme dans 3.4.3. Alors le dual σ du cône polyédral $\sum_{i=1}^r \mathbb{Q}_{\geq 0} m_i$ est saillant et $\mathfrak{D}[f]$ est l'unique diviseur σ-polyédral propre sur C vérifiant $\bar{A} = A[C, \mathfrak{D}[f]]$.

3. La présentation *D.P.D.* est la description donnée dans 3.3.7 pour le cas des surfaces.

Démonstration. D'après [HS, Theorem 2.3.2], la sous-algèbre $\bar{A} \subset \mathbf{k}(C)[M]$ est M-graduée. Puisque A a le même corps des fractions que $\mathbf{k}(C)[M]$, le cône σ est saillant. Par le théorème 3.3.7, il existe un unique diviseur σ-polyédral propre $\mathfrak{D}$ sur C tel que $\bar{A} = A[C, \mathfrak{D}]$. Posons $B := A[C, \mathfrak{D}[f]]$. Alors pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$ et tout $z \in C$, on a l'inégalité

$$h_{\Delta_z[f]}(m_i) \geq -\mathrm{ord}_z f_i,$$

de sorte que pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$,

$$\mathfrak{D}[f](m_i) = \sum_{z \in C} h_{\Delta_z[f]}(m_i) \,.\, z \geq -\mathrm{div}(f_i).$$

On obtient l'inclusion $A \subset B$. Comme B est l'intersection d'anneaux de valuations discrètes de $\mathrm{Frac}\, B/\mathbf{k}$ [De 2, §2.7], l'algèbre B est normale (voir aussi l'argument de démonstration de 4.4.4 (i)). D'où $\bar{A} = A[\mathfrak{D}] \subset B$.

Montrons l'égalité $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}[f]$. Supposons que C est une courbe algébrique projective lisse de genre g. Pour tout $m' \in \sigma_M^\vee$, on a

$$H^0(C, \mathcal{O}_C(\lfloor \mathfrak{D}(m') \rfloor)) \subset H^0(C, \mathcal{O}_C(\lfloor \mathfrak{D}[f](m') \rfloor)). \tag{3.5}$$

Soit $m \in \sigma_M^\vee$ appartenant à l'intérieur relatif de $\sigma^\vee$. Prenons $s \in \mathbb{Z}_{>0}$ tels que $s\mathfrak{D}(m)$ et $s\mathfrak{D}[f](m)$ soient des diviseurs de Cartier à coefficients entiers. Alors par (3.5), par le théorème de Riemann-Roch et puisque $\mathfrak{D}$ est propre, il existe $r_0 \in \mathbb{Z}_{>0}$ tel que pour tout entier $r \geq r_0$,

$$h^0(C, \mathcal{O}_C(rs\mathfrak{D}[f](m))) \geq r\deg(s\mathfrak{D}(m)) + 1 - g > 1.$$

D'après [Ha, IV, Lemma 1.2], pour tout entier $r \geq r_0$, $\deg(rs\mathfrak{D}[f](m)) > 0$ et donc $\mathfrak{D}[f](m)$ est semi-ample. Donc par [AH, Lemma 9.1], on a $\mathfrak{D}[f](m) \geq \mathfrak{D}(m)$. Cette inégalité est aussi vraie lorsque C est une courbe algébrique affine lisse. Revenons à l'hypothèse où C est une courbe algébrique lisse quelconque. Les inégalités

$$\mathfrak{D}(m_i) + \mathrm{div}(f_i) \geq 0, \quad i = 1, \dots, r,$$

entraînent que pour tout $z \in C$, $\Delta_z \subset \Delta_z[f]$. Donc pour tout $m \in \sigma^\vee$, $\mathfrak{D}(m) \geq \mathfrak{D}[f](m)$. Par le lemme 3.4.2, on conclut que $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}[f]$. $\square$

L'exemple qui suit illustre comment on peut établir la normalité d'une algèbre donnée à partir d'un système de générateurs.

Exemple 3.4.5. Soit z une variable et soit $\mathbb{T}$ le tore $(\mathbf{k}^\star)^2$. Considérons la sous-algèbre $\mathbb{T}$-stable

$$A = \mathbf{k}\left[\frac{z}{z-1}\chi^{(2,0)}, \chi^{(0,1)}, z\chi^{(2,2)}, \frac{z^2}{z-1}\chi^{(3,2)}\right] \subset \mathbf{k}(z)[\mathbb{Z}^2].$$

Alors on a les égalités $A^{\mathbb{T}} = \mathbf{k}$ et $(\operatorname{Frac} A)^{\mathbb{T}} = \mathbf{k}(z)$. Le cône des poids $\sigma^\vee \subset \mathbb{Q}^2$ de A est le quadrant positif. Par le théorème 3.4.4, la normalisation $\bar{A}$ de A est égale à $A[\mathbb{P}^1, \mathfrak{D}]$ où $\mathfrak{D} = \Delta_0 \cdot 0 + \Delta_1 \cdot 1 + \Delta_\infty \cdot \infty$ est le diviseur σ-polyédral propre sur $\mathbb{P}^1$ défini par

$$\Delta_0 = -\left(\frac{1}{2}, 0\right) + \sigma,\ \Delta_1 = \left(\frac{1}{2}, 0\right) + \sigma,\ \Delta_\infty = \left[\left(\frac{1}{2}, 0), (0, \frac{1}{2}\right)\right] + \sigma.$$

Par exemple, le polyèdre Δ_0 est donné par les inégalités

$$2x \geq -\operatorname{ord}_0 \frac{z}{z-1} = -1,\ \ y \geq -\operatorname{ord}_0 1 = 0,\ \ 2x + 2y \geq -\operatorname{ord}_0 z = -1,$$

$$3x + 2y \geq -\operatorname{ord}_0 \frac{z^2}{z-1} = -2\,.$$

Un calcul direct montre qu'en fait $A = A[\mathbb{P}^1, \mathfrak{D}]$. Si l'on pose

$$t_1 := \frac{z}{z-1}\chi^{(2,0)},\ \ t_2 := \chi^{(0,1)},\ \ t_3 := z\chi^{(2,2)},\ \ t_4 := \frac{z^2}{z-1}\chi^{(3,2)},$$

alors les fonctions t_1, t_2, t_3, t_4 vérifient la relation irréductible $t_4^2 - t_1^2 t_2^2 t_3 - t_1 t_3^2 = 0$. On conclut que l'hypersurface $V(x_4^2 - x_1^2 x_2^2 x_3 - x_1 x_3^2) \subset \mathbb{A}^4$ identifiée à Spec A est normale.

Rappelons que pour une variété algébrique affine X, on note SAut X le sous-groupe des automorphismes de X engendré par la réunion des images des opérations algébriques de $\mathbb{G}_a$ dans X. Ici une opération de $\mathbb{G}_a$ dans X est vue comme un morphisme de groupes de $\mathbb{G}_a$ vers Aut X. Pour plus d'informations voir [AKZ, AFKKZ] où la notion de variété flexible est introduite. L'exemple suivant est inspiré de [LS, Example 1.1]. Il correspond au cas de $d = 3$ et de $e = 2$.

Exemple 3.4.6. Soient $d, e \geq 2$ des entiers tels que $d + 1 = e^2$. Notons

$$\mathfrak{D}_{d,e} = \Delta_0^{d,e} \cdot 0 + \Delta_1^{d,e} \cdot 1 + \Delta_\infty^{d,e} \cdot \infty$$

le diviseur polyédral propre sur $\mathbb{P}^1$ avec

$$\Delta_0^{d,e} = [(1,0),(1,1)] + \sigma_{de},\ \Delta_1^{d,e} = \left(-\frac{1}{e}, 0\right) + \sigma_{de},\ \Delta_\infty^{d,e} = \left(\frac{e}{d} - 1, 0\right) + \sigma_{de},$$

où σ_{de} est le cône de $\mathbb{Q}^2$ engendré par les vecteurs $(1,0)$ et $(1,de)$, et $X_{d,e} := X[\mathfrak{D}_{d,e}]$. Alors $X_{d,e}$ n'est pas torique. En effet, $X_{d,e}$ n'est pas $\mathbb{T}$-isomorphe à $X[\mathbb{P}^1,\mathfrak{D}]$ avec $\mathfrak{D}$ un diviseur polyédral propre sur $\mathbb{P}^1$ porté par au plus 2 points, i.e. $\operatorname{Card}\operatorname{Supp}\mathfrak{D} \leq 2$ (voir [AL, Corollary 1.4] et le théorème 3.3.9).

Montrons que le groupe $\operatorname{SAut} X_{d,e}$ opère infiniment transitivement dans le lieu lisse de $X_{d,e}$. Pour cela considérons la sous-algèbre

$$A_{d,e} := \mathbf{k}\left[\chi^{(0,1)}, \frac{(1-z)^d}{z^{de-1}}\chi^{(de,-1)}, \frac{1-z}{z^e}\chi^{(e,0)}, \frac{(1-z)^e}{z^d}\chi^{(d,0)}\right] \subset \mathbf{k}(z)[\mathbb{Z}^2]$$

où $\mathbb{T}$ est le tore $(\mathbf{k}^\star)^2$ et z est une variable sur $\mathbf{k}(\mathbb{T})$. Posons

$$u := \chi^{(0,1)},\ v := \frac{(1-z)^d}{z^{de-1}}\chi^{(de,-1)},\ x := \frac{1-z}{z^e}\chi^{(e,0)},\ y := \frac{(1-z)^e}{z^d}\chi^{(d,0)}.$$

Alors les fonctions u, v, x, y vérifient la relation irréductible $uv + x^d - y^e = 0$ (E), identifiant $\operatorname{Spec} A_{d,e}$ avec l'hypersurface $H_{d,e}$ d'équation (E) de $\mathbb{A}^4$. L'origine O de $\mathbb{A}^4$ est l'unique point singulier de $H_{d,e}$.

D'après le critère de normalité de Serre [Vie, Proposition 2], $H_{d,e}$ est normale en O et par [KZ, §5], [AKZ, Theorem 3.2], le groupe $\operatorname{SAut} H_{d,e}$ opère infiniment transitivement dans $H_{d,e} - \{O\}$ comme suspension [4] du plan affine. Par ailleurs, on a $(\operatorname{Frac} A_{d,e})^{\mathbb{T}} = \mathbf{k}(z)$ et $\operatorname{Frac} A_{d,e} = \operatorname{Frac}\mathbf{k}(z)[\mathbb{Z}^2]$. Un calcul facile montre que $\mathfrak{D}[u,v,x,y] = \mathfrak{D}_{d,e}$. On conclut par le théorème 3.4.4.

Notons que le calcul de $\mathfrak{D}_{d,e}$ peut être obtenue à partir de $H_{d,e}$ en utilisant [AH, §11].

Le théorème 3.4.4 appliqué à $\mathbb{T} = \mathbf{k}^\star$ donne le corollaire suivant. Les parties concernant les cas parabolique et hyperbolique ont été établies dans [FZ, 3.9, 4.6]. Grâce à ces résultats, il est montré dans [FZ] que toute $\mathbb{C}^\star$-surface complexe normale affine parabolique ayant un bon quotient isomorphe à $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ est la normalisation d'une hypersurface de $\mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$ d'équation $x^d = yP(z)$, où $P \in \mathbb{C}[z]$ est un polynôme. Une description analogue est donnée dans le cas hyperbolique, c.f. [FZ, 4.8].

4. Rappelons qu'une suspension d'une variété affine V est une hypersurface de $\mathbb{A}^2 \times V$ d'équation $uv - P(x) = 0$, où (u,v) est un système de coordonnées sur $\mathbb{A}^2$ et $P : V \to \mathbb{A}^1$ est une fonction régulière.

Corollaire 3.4.7. *Soit C une courbe algébrique lisse, considérons χ une variable sur $\mathbf{k}(C)$ et soit A une sous-algèbre graduée de $\mathbf{k}(C)[\chi,\chi^{-1}]$ ayant le même corps des fractions que $\mathbf{k}(C)[\chi,\chi^{-1}]$. Alors les assertions suivantes sont vraies.*

(i) (cas elliptique et parabolique) *Si*

$$A = \mathbf{k}[C][f_1\chi^{m_1},\ldots,f_r\chi^{m_r}] \subset \mathbf{k}(C)[\chi,\chi^{-1}],$$

avec $f_i \in \mathbf{k}(C)^\star$ et $m_1,\ldots,m_r \in \mathbb{Z}_{>0}$, alors la présentation de Dolgachev-Pinkham-Demazure (D.P.D.) de $\bar{A} = A_{C,D}$ est donnée par le diviseur de Weil rationnel sur C

$$D = -\min_{1\le i\le r} \frac{\mathrm{div}(f_i)}{m_i}\,;$$

(ii) (cas hyperbolique) *Si $C = \operatorname{Spec} A_0$ est une courbe affine lisse,*

$$A = \mathbf{k}[C][f_1\chi^{-m_1},\ldots,f_r\chi^{-m_r},g_1\chi^{n_1},\ldots,g_s\chi^{n_s}] \subset \mathbf{k}(C)[\chi,\chi^{-1}],$$

avec $n_1,\ldots,n_s,m_1,\ldots,m_r \in \mathbb{Z}_{>0}$, alors la présentation D.P.D. de $\bar{A} = A_0[D_-,D_+]$ est donnée par les $\mathbb{Q}$-diviseurs

$$D_- = -\min_{1\le i\le r} \frac{\mathrm{div}(f_i)}{m_i} \text{ et } D_+ = -\min_{1\le i\le s} \frac{\mathrm{div}(g_i)}{n_i}\,.$$

Démonstration. Nous donnons la démonstration pour le cas de (i). L'assertion (ii) se traite de la même façon. D'après le théorème 3.4.4, on peut écrire $\bar{A} = A[C,\mathfrak{D}]$ avec $\mathfrak{D} = \sum_{z\in C} \Delta_z \cdot z$ où pour $z \in C$,

$$\Delta_z = \{v \in \mathbb{Q},\, m_i \cdot v \ge -\mathrm{ord}_z f_i,\, 1 \le i \le r\}\,.$$

Puisque $D = \mathfrak{D}(1)$, nous obtenons le résultat. □

3.5 Idéaux monomiaux intégralement clos et polyèdres entiers

Dans cette section, nous rappelons une description des idéaux monomiaux intégralement clos en terme de polyèdres entiers. Nous commençons par quelques notions générales.

3.5.1. Puisque nous restons dans un contexte géométrique, la lettre A désigne une algèbre intègre de type fini sur $\mathbf{k}$. Soit $I \subset A$ un idéal. Un élément $a \in A$ est dit *entier* (ou satisfaisant une relation de dépendance intégrale) sur I s'il existe $r \in \mathbb{Z}_{>0}$ et des éléments

$$\lambda_1 \in I,\ \lambda_2 \in I^2, \ldots,\ \lambda_r \in I^r \quad \text{tels que} \quad a^r + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i a^{r-i} = 0\,.$$

L'idéal I est dit *intégralement clos* (ou complet) si tout entier de A sur I appartient à I. On dit que I est *normal* si pour tout entier $i \geq 1$, l'idéal I^i est intégralement clos.

Le sous-ensemble $\bar{I} \subset A$, appelé *clôture intégrale* (ou fermeture intégrale) de I dans A, est l'ensemble des éléments entiers sur I. C'est le plus petit idéal intégralement clos de A contenant I [HS, Corollary 1.3.1]. La démonstration de ce fait utilise les réductions d'idéaux (voir [NR]). Pour plus d'informations sur les idéaux intégralement clos, voir par exemple [LeTe, HS, Va]. Considérons l'algèbre de Rees

$$B = A[It] = A \oplus \bigoplus_{i \geq 1} I^i t^i \subset A[t]$$

correspondante à un idéal I de A. Alors la normalisation de B est

$$\bar{B} = \bar{A} \oplus \bigoplus_{i \geq 1} \overline{\bar{A}\ I^i} t^i \subset A[t] \tag{3.6}$$

où $\bar{A}$ est la normalisation de A (voir [Ri]). La normalisation de B est égale à celle de $\bar{A}[\bar{A}It]$ [HS, Proposition 5.2.4]. Si A est normale alors $A[It]$ est normale si et seulement si I est normal.

Supposons maintenant que A est M-graduée normale. Un idéal I de A est dit *homogène* si I est non nul et si I est engendré par des éléments homogènes de A. Chaque idéal homogène de A est un sous-$\mathbb{T}$-module rationnel et admet une décomposition en somme directe de sous-espaces propres. D'après [HS, Corollary 5.2.3], si I est homogène alors $\bar{I}$ est homogène.

En l'absence de référence, nous donnons la démonstration du lemme suivant.

Lemme 3.5.2. *Soit A une algèbre normale de type fini sur $\mathbf{k}$ et soit I un idéal de A. Alors la fermeture intégrale de $A[It]$ dans son corps des fractions est égale à celle de $A[\bar{I}t]$. En particulier, pour tout $i \in \mathbb{Z}_{>0}$, $\overline{I^i} = \overline{\bar{I}^i}$.*

Démonstration. Pour tout $i \in \mathbb{Z}_{>0}$, on a $I^i \subset \bar{I}^i$, soit $A[It] \subset A[\bar{I}t]$. D'où $\overline{A[It]} \subset \overline{A[\bar{I}t]}$. Par (3.6) et puisque $A = \bar{A}$ est normale, $\bar{I}t$ est inclus dans $\overline{A[It]}$, donc $A[\bar{I}t] \subset \overline{A[It]}$ et finalement $\overline{A[\bar{I}t]} \subset \overline{A[It]}$. La deuxième affirmation est une conséquence de (3.6) et de l'égalité $\overline{A[It]} = \overline{A[\bar{I}t]}$. □

3.5.3. Fixons un cône polyédral saillant $\sigma \subset N_{\mathbb{Q}}$. Considérons une partie $F \subset M_{\mathbb{Q}}$ telle que $F \cap \sigma^\vee$ est non vide. On note $\mathrm{Pol}_{\sigma^\vee}(F)$ l'ensemble des polyèdres de la forme $P = Q + \sigma^\vee$ avec Q un polytope dont les sommets appartiennent à F. Un $\sigma^\vee$*-polyèdre entier* est un élément de $\mathrm{Pol}_{\sigma^\vee}(M)$.

Si $P \in \mathrm{Pol}_{\sigma^\vee}(M)$ alors pour tout entier $e \geq 1$, on pose $eP := P + \ldots + P$ la somme de Minkowski de e exemplaires de P. Le polyèdre eP est l'image de P par l'homothétie de centre 0 et de rapport e. Si $e = 0$ alors on pose $eP = \sigma^\vee$. On dit que P est *normal* si pour tout entier $e \geq 1$,

$$(eP) \cap M = \{m_1 + \ldots + m_e \,|\, m_1, \ldots, m_e \in P \cap M\}.$$

Un sous-monoïde $E \subset M$ est dit *saturé* si pour $d \in \mathbb{Z}_{>0}$ et pour $m \in M$ tels que $dm \in E$, on a $m \in E$. Cela est équivalent à ce que E soit l'intersection de $\mathrm{Cone}(E)$ et du réseau M.

L'assertion suivante est aisée et nous laissons la démonstration aux lecteurs.

Lemme 3.5.4. *Pour un cône polyédral saillant $\sigma \subset N_{\mathbb{Q}}$ et un polyèdre entier $P \in \mathrm{Pol}_{\sigma^\vee}(M)$, on note*

$$S = S_P := \{(m, e) \in M \times \mathbb{N} \,|\, m \in (eP) \cap M\}.$$

Alors S est un sous-monoïde saturé de $M \times \mathbb{Z}$. De plus, pour tout $e \geq 1$, l'enveloppe convexe de

$$E_{[e,P]} := \{m_1 + \ldots + m_e \,|\, m_1, \ldots, m_e \in P \cap M\}$$

dans $M_{\mathbb{Q}}$ est égale à eP.

Rappelons que tout idéal homogène intégralement clos d'une variété torique affine est caractérisé par l'enveloppe convexe de l'ensemble de ses poids. Voir [Vit, 3.1] pour le cas de l'algèbre des polynômes à plusieurs variables. Le résultat suivant est connu (voir [CLS, Proposition 11.3.4] pour le cas où $\sigma^\vee$ est saillant, ainsi que [KKMS, Chapter I, §2] pour le cas général). Par commodité, nous donnons une courte preuve. Cela nous sera utile pour la suite. Pour tout entier e, nous noterons $M_e = M \times \{e\}$.

Théorème 3.5.5. *Soit $\sigma \subset N_{\mathbb{Q}}$ un cône polyédral saillant. Alors l'application*

$$P \mapsto I[P] = \bigoplus_{m \in P \cap M} \mathbf{k}\, \chi^m$$

est une bijection entre $\mathrm{Pol}_{\sigma^\vee}(\sigma_M^\vee)$ et l'ensemble des idéaux homogènes intégralement clos de $A := \mathbf{k}[\sigma_M^\vee]$. Plus précisément, si $I = (\chi^{m_1}, \ldots, \chi^{m_r})$ est un idéal homogène de A alors sa fermeture $\bar{I}$ est $I[P]$ où

$$P = \mathrm{Conv}(m_1, \ldots, m_r) + \sigma^\vee. \tag{3.7}$$

Le cône des poids $\widetilde{\omega}$ de $A[It]$ est l'unique cône vérifiant $\widetilde{\omega} \cap M_e = (eP) \cap M$, pour tout $e \in \mathbb{N}$. De plus, si $P \in \mathrm{Pol}_{\sigma^\vee}(\sigma_M^\vee)$ alors P est normal si et seulement si $I[P]$ est normal.

Démonstration. La justification de la bijectivité de $I \mapsto I[P]$ provient de [KKMS, Chapter I, §2] et nous l'omettons.

Soit $I \subset A$ un idéal engendré par $\chi^{m_1}, \ldots, \chi^{m_r}$. Considérons P comme dans (3.7). Montrons l'égalité $\bar{I} = I[P]$. Puisque $I \subset I[P]$ et comme $I[P]$ est intégralement clos, on a $\bar{I} \subset I[P]$. Soit $\chi^m \in I[P]$. Alors $m \in P \cap M$. Donc il existe $c_1, \ldots, c_r \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ de somme égale à 1 et $c \in \sigma^\vee$ tels que

$$m = \sum_{i=1}^{r} c_i m_i + c.$$

Soit $d' \in \mathbb{Z}_{>0}$ tel que $d'c_i \in M$ pour chaque i et tel que $dc \in \sigma_M^\vee$. Alors $\chi^{d'm} \in I^{d'}$ et donc $\chi^m \in \bar{I}$. D'où $\bar{I} = I[P]$ et la surjectivité de φ.

Déterminons le cône des poids $\widetilde{\omega}$ de $A[It]$. D'après le lemme 3.5.2, on peut supposer que $I = I[P]$. Soit $e \in \mathbb{Z}_{>0}$. Alors on a

$$I[P]^e = \bigoplus_{m \in E[e,P]} \mathbf{k}\chi^m.$$

Notons $\overline{I[P]^e} = I[P_e]$, pour un polyèdre $P_e \in \mathrm{Pol}_{\sigma^\vee}(\sigma_M^\vee)$. Par le lemme 3.5.4, on a d'une part,

$$eP = \mathrm{Conv}(E_{[e,P]}) \subset P_e.$$

D'autre part, $I[P]^e \subset I[eP]$ et donc $I[P_e] \subset I[eP]$. D'où $eP = P_e$. D'après l'égalité (3.6) de 3.5.1, $\widetilde{\omega}$ est le cône des poids de

$$\overline{A[It]} = A \oplus \bigoplus_{e \in \mathbb{Z}_{>0}} I[eP]t^e.$$

D'où $\widetilde{\omega} \cap M_e = (eP) \cap M$, pour tout entier $e \geq 0$. Les autres assertions suivent aisément. $\square$

Le théorème suivant est une conséquence d'un résultat sur la normalité des polytopes entiers [BGN, Theorem 1.1.3].

Théorème 3.5.6. *Soit $\sigma \subset N_{\mathbb{Q}}$ un cône polyédral saillant, notons $n = \dim N_{\mathbb{Q}}$ et considérons $P \in \mathrm{Pol}_{\sigma^\vee}(M)$. Alors pour tout entier $e \geq n-1$, le polyèdre eP est normal. En particulier, tout idéal stable intégralement clos d'une surface torique est normal.*

Démonstration. Soit $\mathscr{E}$ une subdivision de $\sigma^\vee$ par des cônes polyédraux saillants de dimension n. Écrivons $P = Q + \sigma^\vee$ avec Q un polytope entier. Soit $m \in (eP) \cap M$. Alors il existe $\tau \in \mathscr{E}$ tel que $m \in (eQ + \tau) \cap M$. D'après [CLS, Proposition 7.1.9], on a $m \in E_{[e,Q+\tau]}$ (voir 3.5.4). Donc $m \in E_{[e,P]}$ et eP est normal. Le reste provient du théorème 3.5.5. $\square$

Remarque 3.5.7. Notons que dans le cas où $\mathbf{k}[\sigma_M^\vee] = \mathbf{k}[x_1, \dots, x_n]$ est l'algèbre des polynômes, un idéal monomial $I \subset \mathbf{k}[x_1, \dots, x_n]$ est normal si et seulement si pour tout $i = 1, \dots, n-1$, l'idéal I^i est intégralement clos [RRV, 3.1]. Nous verrons une généralisation de ce résultat dans la section 3.7.

D'après [ZS, Appendix 5], [HS, §1.1.4, §14.4.4], tout idéal intégralement clos d'une surface affine lisse est normal. Cependant cela ne s'applique pas aux variétés toriques affines de dimension 3. En effet, d'après [HS, Exercice 1.14], si $\sigma \subset \mathbb{Q}^3$ est l'octant positif et si

$$P := \mathrm{Conv}((2,0,0),\ (0,3,0),\ (0,0,7)) + \sigma^\vee$$

alors $I[P]$ n'est pas normal.

3.6 Idéaux homogènes intégralement clos et $\mathbb{T}$-variétés affines de complexité un

Dans cette section, C désigne une courbe algébrique lisse, le sous-ensemble $\sigma \subset N_{\mathbb{Q}}$ est un cône polyédral saillant et $\mathfrak{D} = \sum_{z \in C} \Delta_z \cdot z$ est un diviseur σ-polyédral propre. Posons $A := A[C, \mathfrak{D}]$. Nous allons étudier les idéaux homogènes intégralement clos de A. Nous commençons par décrire le cône des poids de l'algèbre de Rees de A associée à un idéal homogène. Rappelons que pour un entier e, M_e désigne $M \times \{e\}$.

Lemme 3.6.1. *Soit $I \subset A$ un idéal engendré par des éléments homogènes $f_1\chi^{m_1}, \dots, f_r\chi^{m_r}$. Notons*

$$P = \mathrm{Conv}(m_1, \dots m_r) + \sigma^\vee.$$

Alors le cône des poids $\widetilde{\omega}$ de l'algèbre $(M\times\mathbb{Z})$-graduée $A[It]$ vérifie $\widetilde{\omega}\cap M_e = (eP)\cap M$, pour tout $e \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Soit E l'ensemble des poids de I. La partie $J := \bigoplus_{m\in E}\mathbf{k}\chi^m$ est un idéal de $A' := \mathbf{k}[S]$. Par le lemme 3.5.2, on a

$$\overline{A'[Jt]} = \overline{B[\overline{JB}t]} \text{ avec } B := \mathbf{k}[\sigma_M^\vee].$$

Les éléments $\chi^{m_1},\ldots,\chi^{m_r}$ engendrent l'idéal JB. Puisque $\widetilde{\omega}$ est le cône des poids de $\overline{A'[Jt]}$, le reste provient du théorème 3.5.5. $\square$

L'assertion suivante permet de calculer explicitement la fermeture intégrale des idéaux homogènes de l'algèbre A.

Théorème 3.6.2. *Soit I un idéal de $A = A[C,\mathfrak{D}]$ engendré par des éléments homogènes $f_1\chi^{m_1},\ldots,f_r\chi^{m_r}$. Alors on a*

$$A = \bigoplus_{m\in\sigma_M^\vee} H^0(C,\mathcal{O}_C(\lfloor\widetilde{\mathfrak{D}}(m,0)\rfloor))\chi^m$$

et pour tout entier $e\geq 1$,

$$\overline{I^e} = \bigoplus_{m\in(eP)\cap M} H^0(C,\mathcal{O}_C(\lfloor\widetilde{\mathfrak{D}}(m,e)\rfloor))\chi^m$$

où $(P,\widetilde{\mathfrak{D}})$ vérifie les conditions suivantes.

(i) *P est le polyèdre* $\mathrm{Conv}(m_1,\ldots,m_r)+\sigma^\vee$ *;*

(ii) *$\widetilde{\mathfrak{D}}$ est le diviseur polyédral sur C dont ses coefficients sont définis par*

$$\widetilde{\Delta}_z = \bigcap_{i=1}^{r}\{\,(v,p)\in N_{\mathbb{Q}}\times\mathbb{Q},\ m_i(v)+p\geq -\mathrm{ord}_z f_i\,\}\cap(\Delta_z\times\mathbb{Q}),$$

pour tout $z\in C$.

Démonstration. On applique le théorème 3.4.4 à l'algèbre $A[It]$ en utilisant les éléments $f_i\chi^{m_i}$ et des générateurs homogènes de A. Le diviseur polyédral correspondant $\widetilde{\mathfrak{D}}$ vérifie l'assertion (ii) ci-dessus. On conclut par le lemme 3.6.1. $\square$

Exemple 3.6.3. Reprenons l'exemple 3.4.5. On considère l'idéal homogène

$$I = (t_2, t_3, t_4) \subset A = k[t_1, t_2, t_3, t_4] \cong \frac{k[x_1, x_2, x_3, x_4]}{(x_4^2 - x_1^2x_2^2x_3 - x_1x_3^2)}.$$

Soit $\widetilde{\omega} \subset \mathbb{Q}^3$ le cône vérifiant $\widetilde{\omega} \cap \mathbb{Z}_e^2 = (0, e) + \mathbb{Q}_{\geq 0}^2$, pour tout entier $e \geq 0$. Soit $\widetilde{\mathfrak{D}}$ le diviseur $\widetilde{\omega}^\vee$-polyédral sur $\mathbb{P}^1$ construit par les générateurs t_2, t_3, t_4. Les coefficients non triviaux de $\widetilde{\mathfrak{D}}$ sont

$$\widetilde{\Delta}_0 = -\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right) + \widetilde{\omega}^\vee,\ \widetilde{\Delta}_1 = \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right) + \widetilde{\omega}^\vee,$$

$$\widetilde{\Delta}_\infty = \mathrm{Conv}\left((0, 1, -1), \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right), \left(0, \frac{1}{2}, 0\right)\right) + \widetilde{\omega}^\vee.$$

Fixons un polyèdre $P \in \mathrm{Pol}_{\sigma^\vee}(\sigma_M^\vee)$. Considérons le cône $\widetilde{\omega} \subset M_\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ satisfaisant la relation

$$\widetilde{\omega} \cap M_e = (eP) \cap M,$$

pour tout $e \in \mathbb{N}$. Dans les deux prochains lemmes, nous étudions des diviseurs $\widetilde{\omega}^\vee$-polyédraux dont les pièces graduées correspondant à M_e forment un idéal de A.

Lemme 3.6.4. *Soit $\widetilde{\mathfrak{D}} = \sum_{z \in C} \widetilde{\Delta}_z \cdot z$ un diviseur $\widetilde{\omega}^\vee$-polyédral propre. Alors les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) *Pour tout $z \in C$, le polyèdre Δ_z est la projection orthogonale de $\widetilde{\Delta}_z$ parallèlement à $\mathbb{Q}\,(0_M, 1)$ et si (v, p) est un sommet de $\widetilde{\Delta}_z$ alors $p \leq 0$;*

(ii) *Pour tout entier $e \geq 0$,*

$$I_{[e]} := \bigoplus_{m \in (eP) \cap M} H^0(C, \mathcal{O}_C(\lfloor \widetilde{\mathfrak{D}}(m, e) \rfloor))\chi^m$$

est un idéal de A et $I_{[0]} = A$.

Démonstration. Soit $z \in C$. Notons Δ'_z la projection orthogonale de $\widetilde{\Delta}_z$ parallèlement à l'axe $\mathbb{Q}\,(0_M, 1)$. Montrons l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii). Puisque pour $m \in \sigma^\vee$, $h_{\widetilde{\Delta}_z}(m, 0) = h_{\Delta'_z}(m)$, on a l'égalité $I_{[0]} = A$. Le lemme 3.3.10 implique que pour tout $e \in \mathbb{N}$, $I_{[e]} \subset A$. D'où l'assertion (ii).

Réciproquement, la propreté de $\mathfrak{D}$ et l'égalité $A = I_{[0]}$ montre que $\Delta_z = \Delta'_z$. Soit (v,p) un sommet de $\widetilde{\Delta}_z$. Il reste à montrer que $p \leq 0$. La partie

$$\lambda := \left\{ (m,e) \in M_{\mathbb{Q}} \times \mathbb{Q},\, h_{\widetilde{\Delta}_z}(m,e) = m(v) + ep \right\}$$

est un cône d'intérieur non vide [AH, §1]. Donc l'ensemble $\lambda_{M\times\mathbb{Z}} = \lambda \cap (M \times \mathbb{Z})$ contient un élément (m', e') dans l'intérieur relatif de λ vérifiant $e' \geq 1$. Soit $v' \in \Delta_z$ tels que

$$m'(v') = h_{\Delta_z}(m').$$

Par propreté de $\widetilde{\mathfrak{D}}$ et [AH, Lemma 9.1], il s'ensuit que

$$m'(v) + e'p = h_{\widetilde{\Delta}_z}(m', e') \leq h_{\Delta_z}(m') = m'(v').$$

Comme v appartient à Δ_z, on a $m'(v') \leq m'(v)$ et donc $p \leq 0$. D'où le résultat. □

Lemme 3.6.5. *Soit $\widetilde{\mathfrak{D}}$ un diviseur $\widetilde{\omega}^\vee$-polyédral sur C. Supposons que $\widetilde{\mathfrak{D}}$ vérifie la condition* (ii) *du lemme* 3.6.4. *Alors pour tout $e \in \mathbb{N}$, $I_{[e]}$ est un idéal homogène intégralement clos.*

Démonstration. Soit $e \in \mathbb{N}$. Il suffit de montrer que tout élément homogène de $\bar{I}_{[e]}$ appartient à $I_{[e]}$. Soit $a \in \bar{I}_{[e]}$ un élément homogène. L'élément $a\chi^{(0,e)}$ appartient à la normalisation de $A[C, \widetilde{\mathfrak{D}}]$. Puisque $A[C, \widetilde{\mathfrak{D}}]$ est normal [De 2, §2.7], nous avons $a \in I_{[e]}$. □

Le théorème suivant décrit les idéaux homogènes intégralement clos en complexité 1. Soit S le monoïde des poids de A. Dans ce théorème, nous considérons des couples $(P, \widetilde{\mathfrak{D}})$ vérifiant les conditions suivantes.

(i) P est un polyèdre de $\mathrm{Pol}_{\sigma^\vee}(S)$;

(ii) $\widetilde{\mathfrak{D}} = \sum_{z\in C} \widetilde{\Delta}_z \cdot z$ est un diviseur $\widetilde{\omega}^\vee$-polyédral où $\widetilde{\omega} \subset M_{\mathbb{Q}} \times \mathbb{Q}$ vérifie

$$\widetilde{\omega} \cap M_e = (eP) \cap M,$$

pour tout entier $e \geq 0$;

(iii) Pour tout $z \in C$, Δ_z est la projection orthogonale de $\widetilde{\Delta}_z$ parallèlement à $\mathbb{Q}\,(0_M, 1)$ et tout sommet $(v,p) \in \widetilde{\Delta}_z$ satisfait $p \leq 0$;

(iv) Pour tout $z \in C$, $\widetilde{\Delta}_z$ est l'intersection dans $\Delta_z \times \mathbb{Q}$ d'un nombre fini de demi-espaces

$$\Delta_{m,e} := \{ (v,p) \in N_{\mathbb{Q}} \times \mathbb{Q},\ m(v) + p \geq e \}$$

avec $e \in \mathbb{Z}$ et $m \in P \cap M$ tel que les sections globales du faisceau $\mathcal{O}_C(\lfloor \widetilde{\mathfrak{D}}(m,1) \rfloor)$ engendrent le germe $\mathcal{O}_C(\lfloor \widetilde{\mathfrak{D}}(m,1) \rfloor)_z$.

Théorème 3.6.6. *Soit $\mathfrak{D} = \sum_{z\in C} \Delta_z \cdot z$ un diviseur σ-polyédral propre et soit $A = A[C, \mathfrak{D}]$. Alors il existe une bijection entre l'ensemble des idéaux homogènes intégralement clos de A et l'ensemble des couples $(P, \widetilde{\mathfrak{D}})$ vérifiant* (i)$-$(iv). *Cette correspondance est donnée par*

$$(P, \widetilde{\mathfrak{D}}) \mapsto I = \bigoplus_{m\in P\cap M} H^0(C, \mathcal{O}_C(\lfloor \widetilde{\mathfrak{D}}(m,1) \rfloor))\chi^m. \tag{3.8}$$

De plus, sous cette correspondance, l'algèbre $A[C, \widetilde{\mathfrak{D}}]$ s'identifie à la normalisation de l'algèbre de Rees $A[It]$.

Démonstration. Soit $(P, \widetilde{\mathfrak{D}})$ un couple vérifiant les conditions (i) $-$ (iv). Montrons que $\widetilde{\mathfrak{D}}$ est propre. Soient $z_1, \ldots, z_s$ les points du support de $\widetilde{\mathfrak{D}}$. D'après (iv), on a pour $j = 1, \ldots, s$,

$$\widetilde{\Delta}_{z_j} = (\Delta_z \times \mathbb{Q}) \cap \bigcap_{i=1}^{r_j} \Delta_{m_{ij}, e_{ij}}$$

avec $e_{ij} \in \mathbb{Z}$ et $m_{ij} \in P \cap M$ tel qu'il existe $f_{ij}\chi^{(m_{ij},1)} \in A[C, \widetilde{\mathfrak{D}}]$ homogène satisfaisant $\mathrm{ord}_{z_j} f_{ij} = h_{\widetilde{\Delta}_{z_j}}(m_{ij}, 1)$. Considérons l'algèbre B engendrée par A et par les éléments

$$f_{ij}\chi^{(m_{ij},1)},\ 1 \leq j \leq s,\ 1 \leq i \leq r_j. \tag{3.9}$$

Par le théorème 3.6.2, l'anneau $A[C, \widetilde{\mathfrak{D}}]$ est la normalisation de B. Ce qui donne la propreté de $\widetilde{\mathfrak{D}}$.

Les lemmes 3.6.4 et 3.6.5 montrent que l'application (3.8) est bien définie. Ainsi, $A[C, \widetilde{\mathfrak{D}}] = \overline{A[It]}$ où $t = \chi^{(0,1)}$. Par l'égalité (3.6) de 3.5.1, on déduit l'injectivité.

Montrons la surjectivité. Soit I un idéal intégralement clos de A engendré par des éléments homogènes $f_1\chi^{m_1}, \ldots, f_r\chi^{m_r}$. Considérons le couple $(P, \widetilde{\mathfrak{D}})$ obtenu à partir du théorème 3.6.2. Des lemmes 3.6.1, 3.6.4 et 3.6.5, on obtient (i), (ii), (iii). Montrons (iv). Pour un point $z \in C$, écrivons

$$\widetilde{\Delta}_z = (\Delta_z \times \mathbb{Q}) \cap \bigcap_{i=1}^{r} \Delta_{m_i, e_i}$$

avec pour tout i, $e_i := -\mathrm{ord}_z f_i$. Soit E un sous-ensemble minimal de $\{1, \ldots, r\}$ tel que

$$\widetilde{\Delta}_z = (\Delta_z \times \mathbb{Q}) \cap \bigcap_{i\in E} \Delta_{m_i, e_i}.$$

Fixons un élément $i' \in E$. Alors on a

$$\{(v,p) \in N_{\mathbb{Q}} \times \mathbb{Q}, m_{i'}(v) + p = e_{i'}\} \cap \widetilde{\Delta}_z \neq \emptyset. \tag{3.10}$$

Donc $h_{\widetilde{\Delta}_z}(m_{i'}, 1) = e_{i'} = -\mathrm{ord}_z f_{i'}$. D'où la condition (iv). $\square$

Lorsque C est affine, tout fibré en droite au-dessus de C est globalement engendré. Ainsi, comme conséquence immédiate, on a le résultat suivant.

Corollaire 3.6.7. *Supposons que C est affine. Alors il existe une bijection entre l'ensemble des idéaux homogènes intégralement clos de A et l'ensemble des couples $(P, \widetilde{\mathfrak{D}})$ vérifiant* (ii), (iii) *du théorème* 3.6.6 *et les conditions suivantes.*

(i)' *P est un polyèdre de $\mathrm{Pol}_{\sigma^\vee}(\sigma_M^\vee)$;*

(iv)' *Pour tout $z \in C$, le polyèdre $\widetilde{\Delta}_z$ est l'intersection dans $\Delta_z \times \mathbb{Q}$ d'un nombre fini de demi-espaces*

$$\Delta_{m,e} := \{\, (v,p) \in N_{\mathbb{Q}} \times \mathbb{Q},\ m(v) + p \geq e \,\}$$

avec $e \in \mathbb{Z}$ et $m \in P \cap M$.

La correspondance est donnée par l'application (3.8) *de* 3.6.6.

Remarque 3.6.8. Soient $g_2, g_3 \in \mathbf{k}$ tels que $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$. Considérons la courbe elliptique $C \subset \mathbb{P}^2$ d'équation de Weierstrass $y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$, O son point à l'infini et A l'algèbre graduée

$$\bigoplus_{m \in \mathbb{N}} H^0\left(C, \mathcal{O}_C\left(m \cdot O\right)\right) \chi^m.$$

Soit $\widetilde{\omega} \subset \mathbb{Q}^2$ le cône

$$\mathbb{Q}_{\geq 0}(1,0) + \mathbb{Q}_{\geq 0}(1,1),$$

$P = \mathbb{Q}_{\geq 1}$ et $\widetilde{\mathfrak{D}} := \widetilde{\Delta} \cdot O$ le diviseur polyédral sur C avec $\widetilde{\Delta} = (1,0) + \widetilde{\omega}^\vee$. Alors $(P, \widetilde{\mathfrak{D}})$ vérifie les conditions (i), (ii), (iii) et (iv)$'$ de 3.6.6 et 3.6.7. Cependant la condition (iv) n'est pas satisfaite. L'algèbre $A[C, \widetilde{\mathfrak{D}}]$ est donc distincte de la normalisation de $A[It]$ où I est l'idéal provenant de (3.8) et $t := \chi^{(0,1)}$. Cela montre que l'enoncé du corollaire 3.6.7 ne se généralise pas au cas où C est une courbe algébrique lisse, éventuellement projective.

3.7 Exemples d'idéaux homogènes normaux

Dans cette section, nous considérons l'algèbre $A = A[C, \mathfrak{D}]$ comme dans la section 3.6. Supposons que C est affine et fixons un idéal homogène intégralement clos $I \subset A$. Nous allons donner des conditions sur le couple $(P, \widetilde{\mathfrak{D}})$ associé (voir 3.6.6) pour que I soit normal. Comme d'habitude, nous notons $\widetilde{\Delta}_z$ le coefficient de $\widetilde{\mathfrak{D}}$ au point $z \in C$.

Notation 3.7.1. Pour tout $z \in C$, nous considérons le sous-ensemble

$$\widetilde{P}_z := \mathrm{Conv}\left(\left\{(m,i) \in (P \cap M) \times \mathbb{Z},\ h_{\widetilde{\Delta}_z}(m,1) \geq -i\right\}\right).$$

On vérifie aisément que $\widetilde{P}_z$ est un polyèdre entier de $M_{\mathbb{Q}} \times \mathbb{Q}$. Par ailleurs, pour un ouvert non vide $U \subset C$, $\widetilde{\mathfrak{D}}|U := \sum_{z \in U} \widetilde{\Delta}_z \cdot z$ est le diviseur polyédral sur U obtenu par restriction de $\widetilde{\mathfrak{D}}$.

L'assertion suivante est inspirée de la description de $X[C, \widetilde{\mathfrak{D}}]$ comme variété toroïdale (voir [LS,§2.6], [KKMS, Chapter 2, 4]).

Lemme 3.7.2. *Soit $z \in C$. Supposons que C est affine et que $\mathfrak{D}$, $\widetilde{\mathfrak{D}}$ ont au plus le point z dans leurs supports. Si le polyèdre $\widetilde{P}_z$ est normal alors l'idéal I est normal.*

Démonstration. Fixons $e \in \mathbb{Z}_{>0}$. Déterminons un sous-ensemble de générateurs de $\overline{I^e}$. Pour tout vecteur $(m,i) \in M \times \mathbb{Z}$, posons

$$B_{(m,i)} := H^0(C, \mathcal{O}_C(-i \cdot z))\chi^m.$$

Si $m \in (eP) \cap M$ alors on a l'égalité

$$H^0(C, \mathcal{O}_C(\lfloor \widetilde{\mathfrak{D}}(m,e) \rfloor))\chi^m = \bigcup_{i \in \mathbb{Z},\, i \geq -h_{z,e}(m)} B_{(m,i)}$$

où $h_{z,e}(m) := h_{\widetilde{\Delta}_z}(m,e)$. Donc l'idéal $\overline{I^e}$ est engendré par

$$\bigcup_{(m,i) \in (e\widetilde{P}_z) \cap (M \times \mathbb{Z})} B_{(m,i)}.$$

Montrons que pour tout $(m,i) \in (e\widetilde{P}_z) \cap (M \times \mathbb{Z})$, la partie $B_{(m,i)}$ est incluse dans I^e. Fixons un tel couple (m,i). Par normalité de $\widetilde{P}_z$, il existe

$$(m_1, i_1), \ldots, (m_e, i_e) \in \widetilde{P}_z \cap (M \times \mathbb{Z}) \text{ tels que } \sum_{j=1}^{e} (m_j, i_j) = (m, i).$$

Pour chaque $j = 1, \ldots, e$, $B_{(m_j,i_j)}$ est contenu dans I. Puisque la multiplication

$$B_{(m_1,i_1)} \otimes \ldots \otimes B_{(m_e,i_e)} \to B_{(m,i)}$$

est surjective, on a $B_{(m,i)} \subset I^e$. D'où le résultat. $\square$

Le théorème suivant se déduit du lemme précédent par localisation. Il peut être vu comme un analogue de l'assertion 3.5.6.

Théorème 3.7.3. *Supposons que C est affine. Soit $I \subset A = A[C, \mathfrak{D}]$ un idéal homogène intégralement clos et $(P, \widetilde{\mathfrak{D}})$ le couple correspondant. Si pour tout point z appartenant au support de $\widetilde{\mathfrak{D}}$, le polyèdre $\widetilde{P}_z$ est normal alors l'idéal I est normal. Pour tout entier $e \geq n := \dim N_{\mathbb{Q}}$, l'idéal $\overline{I^e}$ est normal. En particulier, tout idéal stable intégralement clos d'une $\mathbf{k}^\star$-surface affine non elliptique est normal.*

Démonstration. Notons $z_1, \ldots, z_r$ les points distincts du support de $\widetilde{\mathfrak{D}}$. Par le théorème des restes chinois, l'application

$$\pi : \mathbf{k}[C] \to \mathbf{k}^r, \;\; f \mapsto (f(z_1), \ldots, f(z_r))$$

est surjective. Soit $(e_1, \ldots, e_r)$ la base canonique de $\mathbf{k}^r$ et pour $i = 1, \ldots, r$, prenons f_i un élément de $\pi^{-1}(\{e_i\})$. Pour une fonction régulière $f \in \mathbf{k}[C]$, nous notons $C_f = C - V(f)$ son lieu de non-annulation. Soient $f_{r+1}, f_{r+2}, \ldots, f_s \in \mathbf{k}[C]$ tels que

$$U := C - \{z_1, \ldots, z_r\} = \bigcup_{i=r+1}^{s} C_{f_j}.$$

Alors on a l'égalité

$$C = \bigcup_{i=1}^{s} C_{f_i}.$$

Considérons $z_{r+1}, z_{r+2}, \ldots, z_s \in U$ des points tels que $f_i(z_i) \neq 0$ pour $i = r+1, \ldots, s$. Fixons un entier $i \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq i \leq s$. Puisque $\widetilde{P}_{z_i}$ est un polyèdre entier normal, par le lemme 3.7.2, l'idéal

$$I_{f_i} := \bigoplus_{m \in P \cap M} H^0(C_{f_i}, \mathcal{O}_C(\lfloor \widetilde{\mathfrak{D}}(m,1) \rfloor))\chi^m = I \otimes_{\mathbf{k}[C]} \mathbf{k}[C_{f_i}] \subset A \otimes_{\mathbf{k}[C]} \mathbf{k}[C_{f_i}]$$

correspondant au couple $(P, \widetilde{\mathfrak{D}}|C_{f_i})$ est normal. Donc nous avons

$$A[C_{f_i}, \widetilde{\mathfrak{D}}|C_{f_i}] = \overline{(A \otimes_{\mathbf{k}[C]} \mathbf{k}[C_{f_i}])[I_{f_i} t]} \qquad (3.11)$$

$$= (A \otimes_{\mathbf{k}[C]} \mathbf{k}[C_{f_i}])[I_{f_i}t] = A[It] \otimes_{\mathbf{k}[C]} \mathbf{k}[C_{f_i}].$$

Écrivons

$$A[It] = \bigoplus_{(m,e)\in\widetilde{\sigma}^{\vee}_{M\times\mathbb{Z}}} I_{(m,e)}\chi^m t^e$$

avec $I_{(m,e)} \subset \mathbf{k}(C)$, pour tout (m,e). Alors par (3.11), le monoïde des poids de $A[It]$ est $\widetilde{\sigma}^{\vee}_{M\times\mathbb{Z}}$. Cela implique que chaque $I_{(m,e)}$ est un idéal fractionnaire de $\mathbf{k}[C]$. Donc pour tout vecteur $(m,e) \in \widetilde{\sigma}^{\vee}_{M\times\mathbb{Z}}$, il existe un diviseur de Cartier entier $D_{(m,e)}$ sur C tel que

$$I_{(m,e)} = H^0(C, \mathcal{O}_C(D_{(m,e)})).$$

Comme

$$A[It] \otimes_{\mathbf{k}[C]} \mathbf{k}[C_{f_i}] = \bigoplus_{(m,e)\in\widetilde{\sigma}^{\vee}_{M\times\mathbb{Z}}} H^0(C_{f_i}, \mathcal{O}_C(D_{(m,e)}))\chi^m t^e,$$

on a d'une part,

$$\bigcap_{i=1}^{s} A[It] \otimes_{\mathbf{k}[C]} \mathbf{k}[C_{f_i}] = A[It]$$

et d'autre part,

$$\bigcap_{i=1}^{s} A[C_{f_i}, \widetilde{\mathfrak{D}}|C_{f_i}] = A[C, \widetilde{\mathfrak{D}}],$$

on conclut par (3.11) que $A[It] = A[C, \widetilde{\mathfrak{D}}]$. Cela donne la normalité de I. Le reste de la preuve est une conséquence directe du théorème 3.5.6. □

La prochaine assertion est une traduction combinatoire de [RRV, Proposition 3.1] via la correspondance du théorème 3.5.5.

Lemme 3.7.4. *Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier, notons $\sigma^{\vee} = \mathbb{Q}^{n+1}_{\geq 0}$ et soit P un $\sigma^{\vee}$-polyèdre entier contenu dans $\sigma^{\vee}$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *Le polyèdre est normal;*

(ii) *Pour tout $s \in \{1, \ldots, n\}$, on a l'égalité $(sP) \cap \mathbb{Z}^{n+1} = E_{[s,P]}$ (voir 3.5.2).*

Comme application du théorème 3.7.3, nous obtenons une caractérisation de la normalité pour une classe d'idéaux de l'algèbre des polynômes.

Corollaire 3.7.5. *Soit $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Considérons l'algèbre des polynômes*

$$\mathbf{k}^{[n+1]} = \mathbf{k}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$$

à $n+1$ variables munie de la $\mathbb{Z}^n$-graduation

$$\mathbf{k}^{[n+1]} = \bigoplus_{(m_1,\ldots,m_r)\in\mathbb{N}^n} \mathbf{k}[x_0]x_1^{m_1}\ldots x_n^{m_n}$$

et soit I un idéal homogène de A. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) *L'idéal I est normal ;*

(ii) *Pour tout $e \in \{1, \ldots, n\}$, l'idéal I^e est intégralement clos.*

Démonstration. Posons $C := \mathbb{A}^1 = \operatorname{Spec}\mathbf{k}[x_0]$, $\sigma := \mathbb{Q}^n_{\geq 0}$ et $M := \mathbb{Z}^n$. Considérons le diviseur σ-polyédral $\mathfrak{D}$ sur la courbe C dont l'évaluation est identiquement nulle. Alors on a $\mathbf{k}^{[n+1]} = A = A[C, \mathfrak{D}]$.

Montrons l'implication (ii) $\Rightarrow$ (i). Soit $(P, \widetilde{\mathfrak{D}})$ le couple correspondant à l'idéal I. Notons $z_1, \ldots, z_r$ les points distincts du support de $\widetilde{\mathfrak{D}}$. Pour $i = 1, \ldots, r$, considérons le polynôme

$$f_i(x_0) = \prod_{j\neq i}(x_0 - z_j).$$

Alors pour tout i, nous avons

$$I_{f_i} := I \otimes_{\mathbf{k}[C]} \mathbf{k}[C_{f_i}] = \bigoplus_{(m,e)\in\widetilde{P}_{z_i}\cap(M\times\mathbb{Z})} \mathbf{k}\left[\frac{1}{f_i}\right](x_0 - z_i)^e\chi^m$$

où pour $m = (m_1, \ldots, m_r)$, $\chi^m := x_1^{m_1}\ldots x_n^{m_n}$. Fixons $s \in \{1, \ldots, n\}$. Alors on a d'une part,

$$I^s_{f_i} = \bigoplus_{(m,e)\in E_{[s,\widetilde{P}_{z_i}]}} \mathbf{k}\left[\frac{1}{f_i}\right](x_0 - z_i)^e\chi^m$$

et d'autre part,

$$\overline{I^s_{f_i}} = \bigoplus_{m\in(sP)\cap M} H^0(C_{f_i}, \mathcal{O}(\lfloor\widetilde{\mathfrak{D}}(m,e)\rfloor))\chi^m = \bigoplus_{(m,e)\in(s\widetilde{P}_{z_i})\cap(M\times\mathbb{Z})} \mathbf{k}\left[\frac{1}{f_i}\right](x_0 - z_i)^e\chi^m,$$

comparer avec [HS, Proposition 1.1.4]. Puisque I^s est intégralement clos, l'idéal $I^s_{f_i} \subset A_{f_i}$ l'est encore. Ce qui donne par les égalités précédentes,

$$(s\widetilde{P}_{z_i}) \cap (M \times \mathbb{Z}) = E_{[s,\widetilde{P}_{z_i}]}.$$

En appliquant le lemme 3.7.4, on déduit que $\widetilde{P}_{z_i}$ est normal. Par le théorème 3.7.3, on obtient que I est normal. D'où l'implication (ii) $\Rightarrow$ (i). La réciproque est aisée. $\square$

Chapitre 4

La présentation d'Altmann-Hausen en complexité un sur un corps quelconque

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à une description combinatoire des algèbres normales multigraduées affines de complexité 1 sur un corps quelconque. D'un point de vue géométrique, ces algèbres sont reliées à la classification des opérations de tores algébriques déployés de complexité 1 dans les variétés affines. Soit $\mathbf{k}$ un corps et considérons un tore algébrique déployé $\mathbb{T}$ sur $\mathbf{k}$. Rappelons que dans ce contexte une $\mathbb{T}$-variété est une variété normale sur $\mathbf{k}$ munie d'une opération fidèle de $\mathbb{T}$. La plupart des travaux classiques sur les $\mathbb{T}$-variétés (voir [KKMS, Do, Pi, De 2, Ti2, FZ, AH, Ti, AHS, AOPSV, etc.]) demandent que le corps de base $\mathbf{k}$ soit algébriquement clos de caractéristique zéro. Mentionnons tout de même que la description des $\mathbb{G}_m$-variétés affines [De 2] due à Demazure est vraie sur un corps arbitraire.

Donnons une liste de quelques résultats du présent chapitre.

- La présentation d'Altmann-Hausen des $\mathbb{T}$-variétés affines de complexité 1 en termes de diviseurs polyédraux est vraie sur un corps quelconque, voir le théorème 4.6.3.

- Cette description est vraie aussi pour une classe d'algèbres multigraduées sur un anneau de Dedekind, pour plus de détails voir le théorème 4.4.4.

- Nous étudions comment change l'algèbre associée à un diviseur polyédral lorsque qu'on étend les scalaires, voir 4.4.12 et 4.5.9.

Comme autre application, nous donnons une description combinatoire des **G**-

variétés affines de complexité 1, où $\mathbf{G}$ est un tore algébrique possiblement non déployé sur un corps $\mathbf{k}$, en utilisant quelques faits élémentaires de descente galoisienne. Ces $\mathbf{G}$-variétés affines sont décrites par un nouvel objet combinatoire, que l'on appelle *diviseur polyédral stable par Galois*, voir le théorème 4.7.10.

Avant de passer à la formulation de nos résultats, rappelons quelques notions. Nous commençons par le cas le plus simple d'une opération d'un tore algébrique déployé. Rappelons qu'un tore algébrique déployé $\mathbb{T}$ de dimension n sur le corps $\mathbf{k}$ est un groupe algébrique isomorphe à $\mathbb{G}_m^n$, où $\mathbb{G}_m$ est le groupe multiplicatif du corps $\mathbf{k}$. Soit $M = \mathrm{Hom}(\mathbb{T}, \mathbb{G}_m)$ le réseau des caractères du tore $\mathbb{T}$. Alors définir une opération de $\mathbb{T}$ dans une variété affine X est équivalent à fixer une M-graduation sur l'algèbre $A = \mathbf{k}[X]$, où $\mathbf{k}[X]$ est l'anneau des coordonnées de X. Suivant la classification des $\mathbb{G}_m$-surfaces affines [FiKa] nous disons comme dans [Li, 1.1] ou dans 3.3.11 qu'une algèbre M-graduée A est *elliptique* si la pièce graduée A_0 est réduite au corps $\mathbf{k}$. Considérons le corps $\mathbf{k}(X)$ des fonctions rationnelles sur la variété X et soit K_0 son sous-corps des fonctions invariantes sous l'opération de $\mathbb{T}$. La complexité de l'opération de $\mathbb{T}$ dans X est le degré de transcendance de K_0 sur le corps $\mathbf{k}$.

Dans le but de décrire des classes particulières d'algèbres multigraduées de complexité 1, nous aurons à considérer des objets combinatoires de la géométrie convexe et de la géométrie des courbes algébriques. Soit C une courbe régulière sur le corps $\mathbf{k}$. Un point de C est supposé être fermé, et en particulier, éventuellement non rationnel. De plus, il est connu que le corps résiduel en tout point de C est une extension de corps de degré fini sur $\mathbf{k}$.

Pour reformuler notre premier résultat, nous avons besoin de rappeler quelques notations disponibles dans [AH, Section 1]. Désignons par $N = \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_m, \mathbb{T})$ le réseau des sous-groupes à 1 paramètre du tore algébrique déployé $\mathbb{T}$ qui est vu comme le dual du réseau M. Comme d'habitude, on note $M_\mathbb{Q} = \mathbb{Q} \otimes_\mathbb{Z} M$, $N_\mathbb{Q} = \mathbb{Q} \otimes_\mathbb{Z} N$ les espaces vectoriels sur $\mathbb{Q}$ associés à M, N et on considère $\sigma \subset N_\mathbb{Q}$ un cône polyédral saillant. Nous pouvons définir comme dans [AH] un diviseur de Weil $\mathfrak{D} = \sum_{z\in C} \Delta_z \cdot z$ avec des coefficients σ-polyédraux dans $N_\mathbb{Q}$, qui est appelé diviseur polyédral d'Altmann-Hausen. Plus précisément, chaque $\Delta_z \subset N_\mathbb{Q}$ est un polyèdre dont le cône de récession est σ et $\Delta_z = \sigma$ pour presque tout $z \in C$. En désignant par κ_z le corps résiduel du point $z \in C$ et par $[\kappa_z : \mathbf{k}] \cdot \Delta_z$ l'image de Δ_z par l'homothétie de rapport $\deg(z) = [\kappa_z : \mathbf{k}]$, la somme

$$\deg \mathfrak{D} = \sum_{z\in C} [\kappa_z : \mathbf{k}] \cdot \Delta_z$$

est un polyèdre de $N_\mathbb{Q}$. Cette somme peut être vue comme la somme finie de Minkowski de tous les polyèdres $[\kappa_z : \mathbf{k}] \cdot \Delta_z$ différents de σ. En considérant le cône dual $\sigma^\vee \subset M_\mathbb{Q}$

de σ, nous définissons la fonction évaluation

$$\sigma^\vee \to \mathrm{Div}_\mathbb{Q}(C), \quad m \mapsto \mathfrak{D}(m) = \sum_{z\in C} \min_{l\in\Delta_z} \langle m, l\rangle \cdot z$$

à valeurs dans l'espace vectoriel $\mathrm{Div}_\mathbb{Q}(C)$ sur $\mathbb{Q}$ des diviseurs de Cartier rationnels sur C. Comme dans le cas classique [AH, 2.12], nous introduisons la condition de propreté pour le diviseur polyédral $\mathfrak{D}$ (voir 4.4.1, 4.5.4, 4.6.2) que nous rappelons ci-après.

Définition 4.1.1. Un diviseur σ-polyédral $\mathfrak{D} = \sum_{z\in C} \Delta_z \cdot z$ est dit *propre* s'il satisfait une des conditions suivantes.

(i) C est affine.

(ii) C est projective et $\deg \mathfrak{D}$ est strictement contenu dans σ. De plus, si $\deg \mathfrak{D}(m) = 0$ alors m appartient au bord de $\sigma^\vee$ et un multiple entier non nul de $\mathfrak{D}(m)$ est un diviseur principal.

Par exemple, si $C = \mathbb{P}^1_\mathbf{k}$ est la droite projective alors le diviseur polyédral $\mathfrak{D}$ est propre si et seulement si $\deg \mathfrak{D}$ est strictement inclus dans σ. Un des résultats principaux de ce chapitre peut être énoncé comme suit.

Théorème 4.1.2. *Soit* $\mathbf{k}$ *un corps.*

(i) *Pour tout diviseur σ-polyédral propre $\mathfrak{D}$ sur une courbe régulière C sur $\mathbf{k}$ on peut associer une algèbre normale M-graduée de type fini sur $\mathbf{k}$ et de complexité 1, donnée par*

$$A[C, \mathfrak{D}] = \bigoplus_{m\in\sigma^\vee\cap M} A_m, \quad avec \quad A_m = H^0(C, \mathcal{O}_C(\lfloor \mathfrak{D}(m)\rfloor)).$$

(ii) *Réciproquement, toute algèbre normale effectivement*[1] *M-graduée de type fini sur $\mathbf{k}$ et de complexité 1 est isomorphe à $A[C, \mathfrak{D}]$, pour une courbe régulière C sur $\mathbf{k}$ et un diviseur polyédral propre $\mathfrak{D}$ sur C.*

Dans la démonstration de l'assertion (ii), nous utilisant un calcul explicite donné dans le chapitre précédent (voir aussi [La]). Nous divisons la démonstration en deux parties. Dans le *cas non elliptique* nous montrons que l'assertion est vraie dans le contexte plus général des anneaux de Dedekind. Plus précisément, nous donnons un dictionnaire parfait analogue à 4.1.2(i), (ii) pour les algèbres M-graduées définies par

1. Une algèbre M-graduée est dite effectivement M-graduée si l'ensemble de ses poids engendre le réseau M.

un diviseur polyédral sur un anneau de Dedekind (voir 4.4.1, 4.4.2 et le théorème 4.4.4). Nous donnons dans le paragraphe 4.4.6 un exemple avec un diviseur polyédral sur $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. Dans le *cas elliptique,* nous considérons une algèbre M-graduée elliptique A sur $\mathbf{k}$ satisfaisant les hypothèses de 4.1.2 (ii). Par un résultat bien connu (voir par exemple [EGA II, 7.4]), nous construisons une courbe projective régulière à partir du corps des fonctions algébriques $K_0 = (\mathrm{Frac}\, A)^{\mathbb{T}}$. Dans cette construction, les points de C sont alors identifiés avec les places de K_0. Ensuite, nous montrons que cette algèbre M-graduée est décrite par un diviseur polyédral sur C (voir le théorème 4.5.6).

Passons plus généralement au cas des variétés affines avec une opération d'un tore algébrique possiblement non déployé. Le lecteur peut consulter [Bry, CTHS, Vos, ELST] pour la théorie des variétés toriques arithmétiques et [Hu] pour le cas plus général des variétés sphériques. Soit $\mathbf{G}$ un tore sur $\mathbf{k}$; alors $\mathbf{G}$ se déploie dans une extension galoisienne finie $E/\mathbf{k}$. Soit $\mathrm{Var}_{\mathbf{G},E}(\mathbf{k})$ la catégorie des $\mathbf{G}$-variétés affines de complexité 1 (se déployant dans $E/\mathbf{k}$), pour une définition précise voir 4.7.4. Pour un objet $X \in \mathrm{Var}_{\mathbf{G},E}(\mathbf{k})$ nous notons $[X]$ sa classe d'isomorphisme et

$$X_E = X \times_{\mathrm{Spec}\,\mathbf{k}} \mathrm{Spec}\, E$$

l'extension de X sur le corps E. Fixons $X \in \mathrm{Var}_{\mathbf{G},E}(\mathbf{k})$. Comme application des résultats précédents, nous étudions l'ensemble pointé

$$\left(\left\{[Y]\,|\,Y \in \mathrm{Var}_{\mathbf{G},E}(\mathbf{k}) \ \text{ et } \ X_E \simeq_{\mathrm{Var}_{\mathbf{G},E}(E)} Y_E\right\}, [X]\right)$$

des classes d'isomorphismes des $E/\mathbf{k}$-formes de la variété X qui est en bijection avec le premier ensemble pointé $H^1(E/\mathbf{k}, \mathrm{Aut}_{\mathbf{G}_E}(X_E))$ de cohomologie galoisienne. Par des arguments élémentaires (voir 4.7.7) ces derniers ensembles pointés sont en bijection avec l'ensemble pointé des classes de conjugaison des opérations semi-linéaires homogènes de $\mathfrak{S}_{E/\mathbf{k}}$ dans l'algèbre multigraduée $E[X_E]$, où $\mathfrak{S}_{E/\mathbf{k}}$ est le groupe de Galois de l'extension $E/\mathbf{k}$. En traduisant ceci dans le langage des diviseurs polyédraux, nous obtenons une description combinatoire des $E/\mathbf{k}$-formes de X, voir le théorème 4.7.10. Ce théorème peut être vu comme une première étape de l'étude des $E/\mathbf{k}$-formes des $\mathbf{G}$-variétés de complexité 1.

Donnons un court résumé de chaque section de ce chapitre. Dans la section 4.3, nous rappelons comment étendre la présentation D.P.D. des algèbres graduées paraboliques au contexte des anneaux de Dedekind. Ce fait a été mentionné dans l'introduction de [FZ] et traité en premier lieu par Nagat Karroum dans un mémoire de mastère dirigé par Hubert Flenner [Ka]. Dans les sections 4.4 et 4.5, nous étudions respectivement une classe d'algèbres multigraduées sur un anneau de Dedekind et une classe d'algèbres multigraduées elliptiques sur un corps. Dans la section 4.6, nous classifions les $\mathbb{T}$-variétés affines de complexité 1. Enfin, dans la section 4.7, nous traitons le cas des opérations de tores algébriques possiblement non déployé.

Soit $\mathbf{k}$ un corps. Par une *variété* X sur $\mathbf{k}$ on entend un schéma intègre séparé de type fini sur le corps $\mathbf{k}$; on suppose en outre que le corps $\mathbf{k}$ est algébriquement clos dans le corps des fonctions rationnelles $\mathbf{k}(X)$. En particulier, cela implique que X est géométriquement irréductible [Liu, §3.2.2, Corollary 2.14].

4.2 Introduction (english version)

In this chapter, we are interested in a combinatorial description of multigraded normal affine algebras of complexity 1. From a geometric viewpoint, these algebras are related to the classification of algebraic torus actions of complexity 1 on affine varieties. Let $\mathbf{k}$ be a field and consider a split algebraic torus $\mathbb{T}$ over $\mathbf{k}$. Recall that a $\mathbb{T}$-variety is a normal variety over $\mathbf{k}$ endowed with an effective $\mathbb{T}$-action. Most classical works on $\mathbb{T}$-varieties (see [KKMS, Do, Pi, De 2, Ti2, FZ, AH, Ti, AHS, AOPSV, etc.]) require the ground field $\mathbf{k}$ to be algebraically closed of characteristic zero. It is worthwile mentioning that the description of affine $\mathbb{G}_m$-varieties [De 2] due to Demazure holds over any field.

Let us list the most important results of the chapter.

- The Altmann-Hausen presentation of affine $\mathbb{T}$-varieties of complexity 1 in terms of polyhedral divisor holds over an arbitrary field, see Theorem 4.6.3.

- This description holds as well for an important class of multigraded algebras over Dedekind domains, see Theorem 4.4.4.

- We study how the algebra associated to a polyhedral divisor changes when we extend the scalars, see 4.4.12 and 4.5.9.

- As another application, we provide a combinatorial description of affine $\mathbf{G}$-varieties of complexity 1, where $\mathbf{G}$ is a (not necessarily split) torus over $\mathbf{k}$, by using elementary facts on Galois descent. This class of affine $\mathbf{G}$-varieties are classified via a new combinatorial object, which we call a (Galois) invariant polyhedral divisor, see Theorem 4.7.10.

Let us now discuss these results in more detail. We start with a simple case of varieties with an action of a split torus. Recall that a split algebraic torus $\mathbb{T}$ of dimension n over the field $\mathbf{k}$ is an algebraic group isomorphic to $\mathbb{G}_m^n$, where $\mathbb{G}_m$ is the multiplicative group of the field $\mathbf{k}$. Let $M = \operatorname{Hom}(\mathbb{T}, \mathbb{G}_m)$ be the character lattice of the torus $\mathbb{T}$. Then defining a $\mathbb{T}$-action on an affine variety X is equivalent to fixing an M-grading on the algebra $A = \mathbf{k}[X]$, where $\mathbf{k}[X]$ is the coordinate ring of X. Following the classification of affine $\mathbb{G}_m$-surfaces [FiKa] we say as in [Li, 1.1] or in 3.3.11 that the M-graded algebra A is *elliptic* if the graded piece A_0 is reduced to $\mathbf{k}$. Multigraded affine algebras are classified via a numerical invariant called complexity. Consider the field $\mathbf{k}(X)$ of rational functions on X and its subfield K_0 of $\mathbb{T}$-invariant functions. The complexity of the $\mathbb{T}$-action on X is the transcendence degree of K_0 over the field $\mathbf{k}$.

In order to describe particular classes of multigraded algebras of complexity 1, we have to consider combinatorial objects coming from convex geometry and from the geometry of algebraic curves. Let C be a regular curve over $\mathbf{k}$. A point of C is assumed to be a closed point, and in particular, not necessarily rational. Thus, the residue field extension of $\mathbf{k}$ at any point of C has finite degree.

To reformulate our first result, we need some combinatorial notions of convex geometry, see [AH, Section 1]. Denote by $N = \operatorname{Hom}(\mathbb{G}_m, \mathbb{T})$ the lattice of one parameter subgroups of the torus $\mathbb{T}$ which is the dual of the lattice M. Let $M_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M$, $N_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} N$ be the associated dual $\mathbb{Q}$-vector spaces of M, N and let $\sigma \subset N_{\mathbb{Q}}$ be a strongly convex polyhedral cone. We can define as in [AH] a Weil divisor $\mathfrak{D} = \sum_{z\in C} \Delta_z \cdot z$ with σ-polyhedral coefficients in $N_{\mathbb{Q}}$, called a polyhedral divisor of Altmann-Hausen. More precisely, each $\Delta_z \subset N_{\mathbb{Q}}$ is a polyhedron with a tail cone σ and $\Delta_z = \sigma$ for all but finitely many points $z \in C$. Denoting by κ_z the residue field of the point $z \in C$ and by $[\kappa_z : \mathbf{k}] \cdot \Delta_z$ the image of Δ_z under the homothety of ratio $\deg(z) = [\kappa_z : \mathbf{k}]$, the sum

$$\deg \mathfrak{D} = \sum_{z\in C} [\kappa_z : \mathbf{k}] \cdot \Delta_z$$

is a polyhedron in $N_{\mathbb{Q}}$. This sum may be seen as the finite Minkowski sum of all polyhedra $[\kappa_z : \mathbf{k}] \cdot \Delta_z$ different from σ. Considering the dual cone $\sigma^\vee \subset M_{\mathbb{Q}}$ of σ, we define an evaluation function

$$\sigma^\vee \to \operatorname{Div}_{\mathbb{Q}}(C), \quad m \mapsto \mathfrak{D}(m) = \sum_{z\in C} \min_{l\in\Delta_z} \langle m, l\rangle \cdot z$$

with value in the vector space $\operatorname{Div}_{\mathbb{Q}}(C)$ of Weil $\mathbb{Q}$-divisors over C. As in the classical case [AH, 2.12] we introduce the technical condition of properness for the polyhedral divisor $\mathfrak{D}$ (see 4.4.1, 4.5.4, 4.6.2) that we recall thereafter.

Definition 4.2.1. A σ-polyhedral divisor $\mathfrak{D} = \sum_{z\in C} \Delta_z \cdot z$ is called *proper* if it satisfies one of the following conditions.

(i) C is affine.

(ii) C is projective and $\deg \mathfrak{D}$ is strictly contained in the cone σ. Furthermore, if $\deg \mathfrak{D}(m) = 0$ then m belongs to the boundary of $\sigma^\vee$ and some non-zero integral multiple of $\mathfrak{D}(m)$ is principal.

For instance, if $C = \mathbb{P}^1_{\mathbf{k}}$ is the projective line then the polyhedral divisor $\mathfrak{D}$ is proper if and only if $\deg \mathfrak{D}$ is strictly included in σ. One of the main results of this paper can be stated as follows.

Theorem 4.2.2. *Let* $\mathbf{k}$ *be field.*

(i) *To any proper σ-polyhedral divisor $\mathfrak{D}$ on a regular curve C over $\mathbf{k}$ one can associate a normal finitely generated effectively*[2] *M-graded domain of complexity 1 over $\mathbf{k}$, given by*

$$A[C, \mathfrak{D}] = \bigoplus_{m \in \sigma^\vee \cap M} A_m, \ \ \textit{where} \ \ A_m = H^0(C, \mathcal{O}_C(\lfloor \mathfrak{D}(m) \rfloor)).$$

(ii) *Conversely, any normal finitely generated effectively M-graded domain of complexity 1 over $\mathbf{k}$ is isomorphic to $A[C, \mathfrak{D}]$ for some regular curve C over $\mathbf{k}$ and some proper polyhedral divisor $\mathfrak{D}$ over C.*

In the proof of assertion (ii), we use an effective calculation from [La]. We divide the proof into two cases. In the *non-elliptic case* we show that the assertion holds more generally in the context of Dedekind domains. More precisely, we give a perfect dictionary similar to 4.1.2(i), (ii) for M-graded algebras defined by a polyhedral divisor over a Dedekind ring (see 4.4.1, 4.4.2 and Theorem 4.4.4). We deal in 4.4.6 with an example of a polyhedral divisor over $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. In the *elliptic case,* we consider an elliptic M-graded algebra A over $\mathbf{k}$ satisfying the assumptions of 4.1.2 (ii). By a well known result (see [EGA II, 7.4]), we can construct a regular projective curve arising from the algebraic function field $K_0 = (\operatorname{Frac} A)^{\mathbb{T}}$. In this construction, the points of C are identified with the places of K_0. Then we show that the M-graded algebra is described by a polyhedral divisor over C (see Theorem 4.5.6).

Let us pass further to the general case of varieties with an action of a not necessarily split torus. The reader may consult [Bry, CTHS, Vos, ELST] for the theory of non-split toric varieties and [Hu] for the spherical embeddings. Let $\mathbf{G}$ be a torus over $\mathbf{k}$; then $\mathbf{G}$ splits in a finite Galois extension $E/\mathbf{k}$. Let $\mathrm{Var}_{\mathbf{G},E}(\mathbf{k})$ be the category of affine $\mathbf{G}$-varieties of complexity one splitting in $E/\mathbf{k}$ (see 4.7.4). For an object $X \in \mathrm{Var}_{\mathbf{G},E}(\mathbf{k})$

2. An M-graded algebra is said to be effectively M-graded if its set of weight generates the lattice M.

we let $[X]$ be its isomorphism class and $X_E = X \times_{\operatorname{Spec} \mathbf{k}} \operatorname{Spec} E$ be the extension of X over the field extension. Fixing $X \in \operatorname{Var}_{\mathbf{G},E}(\mathbf{k})$, as an application of our previous results, we study the pointed set

$$\left(\left\{[Y] \,|\, Y \in \operatorname{Var}_{\mathbf{G},E}(\mathbf{k}) \text{ and } X_E \simeq_{\operatorname{Var}_{\mathbf{G},E}(E)} Y_E\right\}, [X]\right)$$

of isomorphism classes of $E/\mathbf{k}$-forms of X that is in bijection with the first pointed set $H^1(E/\mathbf{k}, \operatorname{Aut}_{\mathbf{G}_E}(X_E))$ of non-abelian Galois cohomology. By elementary arguments (see 4.7.7) the latter pointed sets are described by all possible homogeneous semi-linear $\mathfrak{S}_{E/\mathbf{k}}$-actions on the multigraded algebra $E[X_E]$, where $\mathfrak{S}_{E/\mathbf{k}}$ is the Galois group of $E/\mathbf{k}$. Translating this to the language of polyhedral divisors, we obtain a combinatorial description of $E/\mathbf{k}$-forms of X, see Theorem 4.7.10. This theorem can be viewed as a first step towards the study of the forms of $\mathbf{G}$-varieties of complexity 1.

Let us give a brief summary of the contents of each section. In Section 4.3, we recall how to extend the D.P.D. presentation of a parabolic graded algebra to the context of a Dedekind domain. This fact has been mentioned in [FZ] and firstly treated by Nagat Karroum in a master dissertation [Ka]. In Sections 4.4 and 4.5, we study respectively a class of multigraded algebras over Dedekind domains and a class of elliptic multigraded algebras over a field. In Section 4.6, we classify split affine $\mathbb{T}$-varieties of complexity 1. The last section is devoted to the non-split case.

Let $\mathbf{k}$ be a field. By a *variety* X over $\mathbf{k}$ we mean an integral separated scheme of finite type over $\mathbf{k}$; one assumes in addition that $\mathbf{k}$ is algebraically closed in the field of rational functions $\mathbf{k}(X)$. In particular, X is geometrically irreducible [Liu, §3.2.2, Corollary 2.14].

4.3 Algèbres graduées normales sur un anneau de Dedekind et présentation D.P.D.

Dans cette section, nous généralisons la présentation D.P.D. introduite dans [FZ, Section 3] au contexte des anneaux de Dedekind (voir [Ka]). Commençons par une définition bien connue.

4.3.1. Un anneau intègre A_0 est dit de *Dedekind* s'il n'est pas un corps et s'il satisfait les conditions suivantes.

(i) L'anneau A_0 est noethérien.

(ii) L'anneau A_0 est intégralement clos dans son corps des fractions.

(iii) Tout idéal premier non nul de A_0 est un idéal maximal.

Donnons quelques exemples classiques d'anneaux de Dedekind.

Exemple 4.3.2. Soit K un corps de nombres. Si $\mathbb{Z}_K$ désigne l'anneau des entiers de K alors $\mathbb{Z}_K$ est un anneau de Dedekind.

Soit A une algèbre normale de type fini et de dimension 1 sur un corps $\mathbf{k}$. D'un point de vue géométrique, le schéma $C = \operatorname{Spec} A$ est une courbe affine régulière sur $\mathbf{k}$. L'anneau des coordonnées $A = \mathbf{k}[C]$ est de Dedekind.

L'algèbre des séries formelles $\mathbf{k}[[t]]$ à une variable sur le corps $\mathbf{k}$ est un anneau de Dedekind. Plus généralement, tout anneau principal (et donc tout anneau de valuation discrète) qui n'est pas un corps est un anneau de Dedekind.

4.3.3. Soit A_0 un anneau intègre de corps des fractions K_0. Rappelons qu'un *idéal fractionnaire* $\mathfrak{b}$ de A_0 est un sous-module de K_0 non nul de type fini sur A_0. En fait, tout idéal fractionnaire de A_0 est de la forme $\frac{1}{f} \cdot \mathfrak{a}$, où $f \in A_0$ est un élément non nul et $\mathfrak{a}$ est un idéal non nul de A_0. Si $\mathfrak{b}$ est égal à $u \cdot A_0$, pour $u \in K_0$ non nul, alors on dit que $\mathfrak{b}$ est un *idéal fractionnaire principal.*

Le résultat suivant donne une description des idéaux fractionnaires de A_0 en termes de diviseurs de Weil sur le schéma $Y = \operatorname{Spec} A_0$, lorsque A_0 est un anneau de Dedekind. Ce résultat est bien connu. Nous incluons ici une courte démonstration.

Théorème 4.3.4. *Soit A_0 un anneau de Dedekind de corps des fractions K_0. Posons $Y = \operatorname{Spec} A_0$. Alors l'application*

$$\operatorname{Div}_{\mathbb{Z}}(Y) \to \operatorname{Id}(A_0),\ D \mapsto H^0(Y, \mathcal{O}_Y(D))$$

est une bijection entre l'ensemble $\operatorname{Div}_{\mathbb{Z}}(Y)$ des diviseurs de Weil entiers sur Y et l'ensemble $\operatorname{Id}(A_0)$ des idéaux fractionnaires de A_0. Tout idéal fractionnaire est localement libre de rang 1 comme module sur A_0 et l'application naturelle de multiplication

$$H^0(Y, \mathcal{O}_Y(D)) \otimes H^0(Y, \mathcal{O}_Y(D')) \to H^0(Y, \mathcal{O}_Y(D + D'))$$

est surjective. Un diviseur de Weil D sur le schéma Y est principal (resp. effectif) si et seulement si l'idéal correspondant est principal (resp. contient A_0).

Démonstration. Par [Liu, §4.1.1, Proposition 1.12] le localisé de A_0 en tout idéal premier est un anneau principal. Donc par [Ha, II.6.11] le groupe des diviseurs de Weil entiers sur Y s'identifie au groupe des diviseurs de Cartier. En particulier, tout module $H^0(Y, \mathcal{O}_Y(D))$ sur A_0 est de type fini [Ha, II.5.5], localement libre de rang 1 et non nul. Par conséquent, l'application

$$\mathrm{Div}_{\mathbb{Z}}(Y) \to \mathrm{Id}(A_0)$$

est bien définie.

Soient D, D' des diviseurs de $\mathrm{Div}_{\mathbb{Z}}(Y)$. Alors par les observations précédentes, les faisceaux $\mathcal{O}_Y(D) \otimes \mathcal{O}_Y(D')$ et $\mathcal{O}_Y(D+D')$ de $\mathcal{O}_Y$-modules sont isomorphes. Cela induit un isomorphisme au niveau des sections globales.

Tout idéal premier non nul de A_0 est le module des sections globales d'un faisceau inversible sur $\mathcal{O}_Y$. Ainsi par la décomposition en produit d'idéaux premiers au sein d'un anneau de Dedekind, l'application $\mathrm{Div}_{\mathbb{Z}}(Y) \to \mathrm{Id}(A_0)$ est surjective.

Supposons que l'on ait l'égalité

$$H^0(Y, \mathcal{O}_Y(D)) = H^0(Y, \mathcal{O}_Y(D')),$$

pour des éléments $D, D' \in \mathrm{Div}_{\mathbb{Z}}(Y)$. Alors nous pouvons écrire $D = D_+ - D_-$ et $D = D'_+ - D'_-$, où D_+, D'_+, D_-, D'_+ sont des diviseurs de Weil effectifs entiers. En appliquant des produits tensoriels, nous obtenons la relation

$$H^0(Y, \mathcal{O}_Y(-D_- - D'_+)) = H^0(Y, \mathcal{O}_Y(-D'_- - D_+))$$

entre idéaux de A_0. À nouveau en utilisant la décomposition en produit d'idéaux premiers, nous avons $-D_- - D'_+ = -D'_- - D_+$ de sorte que $D = D'$. On conclut que l'application est injective.

Supposons que $H^0(Y, \mathcal{O}_Y(D))$ contient A_0. Écrivons $D = D_+ - D_-$ avec D_+, D_- des diviseurs de Weil effectifs entiers ayant des supports disjoints. Alors par hypothèse, nous avons

$$H^0(Y, \mathcal{O}_Y(0)) = A_0 = A_0 \cap H^0(Y, \mathcal{O}_Y(D)) = H^0(Y, \mathcal{O}_Y(-D_-)).$$

Cela donne $D_- = 0$ et donc le diviseur D est effectif. Le reste de la démonstration est aisé. □

Notation 4.3.5. Soit A_0 un anneau de Dedekind. Pour un diviseur de Weil rationnel D sur $Y = \mathrm{Spec}\, A_0$, nous désignons par $A_0[D]$ l'anneau gradué [3]

$$\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} H^0(Y, \mathcal{O}_Y(\lfloor iD \rfloor))\, t^i,$$

3. Rappelons que $\lfloor iD \rfloor$ est le diviseur de Weil entier obtenu à partir de iD en prenant la partie entière sur chaque coefficient.

où t est une variable sur le corps K_0. Notons que l'anneau intègre $A_0[D]$ est normal comme intersection d'anneaux de valuation discrète de corps des fractions $K_0(t)$; le lecteur peut consulter les arguments de démonstration de [De 2, 2.7].

Le prochain lemme donne une présentation D.P.D. pour une classe naturelle de sous-anneaux gradués de $K_0[t]$. Ce résultat nous sera utile pour la prochaine section. Nous donnons ici une démonstration élémentaire en utilisant la description de 4.3.4 concernant les idéaux fractionnaires de A_0.

Lemme 4.3.6. *Soit A_0 un anneau de Dedekind avec corps des fractions K_0. Soit*

$$A = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} A_i\, t^i \subset K_0[t]$$

une sous-algèbre normale de type fini sur A_0 où pour tout $i \in \mathbb{N}$, $A_i \subset K_0$. Supposons que le corps des fractions de A est exactement $K_0(t)$. Alors il existe un et un seul diviseur de Weil rationnel D sur le schéma affine $Y = \operatorname{Spec} A_0$ tel que $A = A_0[D]$. De plus, nous avons $Y = \operatorname{Proj} A$.

Démonstration. Par le théorème 4.3.4 et le lemme 2.2 de [GY], pour tout module non nul A_i, il existe un diviseur $D_i \in \operatorname{Div}_{\mathbb{Z}}(Y)$ tel que

$$A_i = H^0(Y, \mathcal{O}_Y(D_i)).$$

Par [Bou, III.3, Proposition 3], il existe $d \in \mathbb{Z}_{>0}$ tel que la sous-algèbre

$$A^{(d)} := \bigoplus_{i \geq 0} A_{di}\, t^{di}$$

est engendrée par la partie $A_d\, t^d$. En procédant par récurrence, pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a $D_{di} = iD_d$. Posons $D = D_d/d$. Alors en utilisant l'hypothèse de normalité des anneaux A et $A_0[D]$, nous obtenons que pour tout élément homogène $f \in K_0[t]$,

$$f \in A_0[D] \Leftrightarrow f^d \in A_0[D] \Leftrightarrow f^d \in A \Leftrightarrow f \in A.$$

Cela donne l'égalité $A = A_0[D]$.

Soit D' un autre diviseur de Weil rationnel sur Y tel que $A = A_0[D']$. En comparant les pièces graduées de $A_0[D]$ et de $A_0[D']$, il s'ensuit que $\lfloor iD \rfloor = \lfloor iD' \rfloor$, pour chaque entier $i \in \mathbb{N}$. D'où $D = D'$ et ainsi la décomposition est unique.

Il reste à montrer l'égalité $Y = \operatorname{Proj} A$. Posons d'abord $V = \operatorname{Proj} A$. Par l'exercice 5.13 de [Ha, II] et la proposition 3 de [Bou, III.1], nous pouvons supposer que $A =$

$A_0[D]$ est engendrée comme algèbre sur A_0 par la partie $A_1 t$. Puisque que le faisceau $\mathcal{O}_Y(D)$ est localement libre de rang 1 sur $\mathcal{O}_Y$, il existe $g_1, \ldots, g_s \in A_0$ tels que

$$Y = \bigcup_{j=1}^{s} Y_{g_j} \quad \text{avec} \quad Y_{g_j} = \mathrm{Spec}\,(A_0)_{g_j}$$

et tels que pour $e = 1, \ldots, s$, on a

$$A_1 \otimes_{A_0} (A_0)_{g_e} = \mathcal{O}_Y(D)(Y_{g_e}) = h_e \cdot A_0,$$

pour $h_e \in K_0^\star$. Soit $\pi : V \to Y$ le morphisme naturel induit par l'inclusion $A_0 \subset A$. L'image inverse de l'ouvert Y_{g_e} sous l'application π est

$$\mathrm{Proj}\, A \otimes_{A_0} (A_0)_{g_e} = \mathrm{Proj}\,(A_0)_{g_e}[A_1 \otimes_{A_0} (A_0)_{g_e} t] = \mathrm{Proj}\,(A_0)_{g_e}[h_e t] = Y_{g_e},$$

et les recollements sont les mêmes. Ainsi, l'application π permet d'identifier Y avec V, comme demandé. □

Comme conséquence des arguments de démonstration de [FZ, 3.9], nous obtenons le corollaire suivant.

Corollaire 4.3.7. *Soient A_0 un anneau de Dedekind avec corps des fractions K_0 et t une variable sur K_0. Considérons la sous-algèbre*

$$A = A_0[f_1 t^{m_1}, \ldots, f_r t^{m_r}] \subset K_0[t]$$

où $m_1, \ldots, m_r$ sont des entiers strictement positifs et les éléments $f_1, \ldots, f_r \in K_0^\star$ sont pris de sorte que le corps des fractions de A est le corps $K_0(t)$. Alors la normalisation de l'anneau intègre A est $A_0[D]$, où D est le diviseur de Weil rationnel

$$D = -\min_{1 \leq i \leq r} \frac{\mathrm{div}\, f_i}{m_i}\,.$$

4.4 Algèbres multigraduées normales sur un anneau de Dedekind et diviseurs polyédraux

Soient A_0 un anneau de Dedekind et K_0 son corps des fractions. Étant donné un réseau M, le but de cette section est d'étudier les sous-algèbres M-graduées normales de $K_0[M]$ de type fini sur A_0. Remarquons que le fait de demander que ces algèbres aient le même corps des fractions que celui de $K_0[M]$ n'est pas une hypothèse restrictive. Nous montrons ci-après que ces algèbres admettent une description combinatoire faisant intervenir des diviseurs polyédraux.

Dans la suite, nous fixons conformément aux notations du premier chapitre, des réseaux duaux M, N et un cône polyédral saillant $\sigma \subset N_{\mathbb{Q}}$. La définition suivante introduit la notion de diviseurs polyédraux sur un anneau de Dedekind.

Définition 4.4.1. Soit A_0 un anneau de Dedekind. Considérons le sous-ensemble Z des points fermés du schéma affine $Y = \operatorname{Spec} A_0$. Un diviseur *$\sigma$-polyédral* $\mathfrak{D}$ sur A_0 est une somme formelle

$$\mathfrak{D} = \sum_{z \in Z} \Delta_z \cdot z,$$

où Δ_z appartient à $\operatorname{Pol}_\sigma(N_{\mathbb{Q}})$ et pour tout $z \in Z$, en dehors d'un ensemble fini, on a $\Delta_z = \sigma$.

Pour des éléments $z_1, \ldots, z_r$ de Z tels que pour tout $z \in Z$ et tout $i = 1, \ldots, r$, $z \neq z_i$ implique $\Delta_z = \sigma$, si la mention de A_0 est claire, alors nous notons

$$\mathfrak{D} = \sum_{i=1}^{r} \Delta_{z_i} \cdot z_i.$$

En partant d'un diviseur σ-polyédral $\mathfrak{D}$, nous construisons une algèbre M-graduée sur A_0 de la même manière que dans [AH, Section 3].

4.4.2. Soit $m \in \sigma^\vee$. *L'évaluation* de $\mathfrak{D}$ en un vecteur $m \in \sigma^\vee$ est le diviseur de Weil rationnel

$$\mathfrak{D}(m) = \sum_{z \in Z} h_{\Delta_z}(m) \cdot z \quad \text{avec} \quad h_{\Delta_z}(m) = \min_{v \in \Delta_z} \langle m, v \rangle.$$

Par analogie avec les notations de [FZ] pour les anneaux gradués, nous désignons par $A_0[\mathfrak{D}]$ le sous-anneau M-gradué

$$\bigoplus_{m \in \sigma^\vee_M} A_m \chi^m \subset K_0[M] \quad \text{avec} \quad A_m = H^0\left(Y, \mathcal{O}_Y\left(\lfloor \mathfrak{D}(m) \rfloor\right)\right).$$

Notation 4.4.3. Soit

$$f = (f_1 \chi^{m_1}, \ldots, f_r \chi^{m_r})$$

un r-uplet d'éléments homogènes de $K_0[M]$. Ici on sous-entend que chaque f_i appartient à $K_0^\star$. Supposons que les vecteurs $m_1, \ldots, m_r$ engendrent le cône $\sigma^\vee$. Nous désignons par $\mathfrak{D}[f]$ le diviseur σ-polyédral

$$\sum_{z\in Z} \Delta_z[f]\cdot z \quad \text{avec} \quad \Delta_z[f] = \{\, v \in N_\mathbb{Q} \mid \langle m_i, v\rangle \geq -\mathrm{ord}_z f_i,\ \ i = 1, 2, \ldots, r \,\}\,.$$

Notons que dans la section 4.5, nous utilisons une notation analogue pour les diviseurs polyédraux sur une courbe projective régulière ; nous remplaçons donc l'ensemble Z par la courbe projective régulière C.

Le résultat principal de cette section est le théorème suivant. Pour une démonstration de la partie (iii), nous référons le lecteur aux arguments de démonstration du théorème 3.4.4 (voir aussi [La, 2.4]).

Théorème 4.4.4. *Soient A_0 un anneau de Dedekind avec corps des fractions K_0 et $\sigma \subset N_\mathbb{Q}$ un cône polyédral saillant. Alors les assertions suivantes sont vraies.*

(i) *Si $\mathfrak{D}$ est un diviseur σ-polyédral sur A_0 alors l'algèbre $A_0[\mathfrak{D}]$ est normale, noethérienne, et a son corps des fractions égal à celui de $K_0[M]$.*

(ii) *Réciproquement, soit*

$$A = \bigoplus_{m\in\sigma_M^\vee} A_m\chi^m \subset K_0[M]$$

une sous-algèbre M-graduée normale noethérienne sur A_0 avec cône des poids $\sigma^\vee$ et $A_m \subset K_0$, pour tout $m \in \sigma_M^\vee$. Supposons que les anneaux intègres A et $K_0[M]$ ont le même corps des fractions. Alors il existe un unique diviseur σ-polyédral $\mathfrak{D}$ sur A_0 tel que $A = A_0[\mathfrak{D}]$.

(iii) *De façon plus explicite, soit*

$$f = (f_1\chi^{m_1}, \ldots, f_r\chi^{m_r})$$

un r-uplet d'éléments homogènes de $K_0[M]$ avec $m_1, \ldots, m_r$ des vecteurs non nuls engendrant le réseau M. Alors la normalisation de l'anneau

$$A = A_0[f_1\chi^{m_1}, \ldots, f_r\chi^{m_r}]$$

est exactement $A_0[\mathfrak{D}[f]]$ (voir 4.4.3).

Commençons par un exemple élémentaire.

Exemple 4.4.5. Posons ici $A_0 = \mathbb{Z}$. Soient x, y des variables indépendantes sur $\mathbb{Q}$. Considérons le sous-anneau $\mathbb{Z}^2$-gradué

$$A = \mathbb{Z}\left[\frac{2}{3}\,xy^2,\ \frac{1}{9}\,x,\ \frac{4}{3}\,x^2y\right] \subset \mathbb{Q}(x, y).$$

Nous allons calculer la normalisation de A. Notons que $N_{\mathbb{Q}}$ est identifié avec le plan rationnel $\mathbb{Q}^2$. Par le théorème 4.4.4, nous avons $\bar{A} = A_0[\mathfrak{D}]$ où $\mathfrak{D} = \Delta_2 \cdot (2) + \Delta_3 \cdot (3)$. Les coefficients Δ_2 et Δ_3 sont donnés par les égalités suivantes.

$$\Delta_2 = \left\{(v_1, v_2) \in \mathbb{Q}^2 \,|\, v_1 + 2v_2 \geq -1,\ v_1 \geq 0,\ 2v_1 + v_2 \geq -2\right\}$$

et

$$\Delta_3 = \left\{(v_1, v_2) \in \mathbb{Q}^2 \,|\, v_1 + 2v_2 \geq 1,\ v_1 \geq 2,\ 2v_1 + v_2 \geq 1\right\}.$$

Plus précisément, le cône des poids de A est $\omega = \mathbb{Q}_{\geq 0}(1, 2) + \mathbb{Q}_{\geq 0}(1, 0)$. Pour tout $(m_1, m_2) \in \omega_{\mathbb{Z}^2}$, on a

$$\mathfrak{D}(m_1, m_2) = -\frac{m_2}{2} \cdot (2) + \left(2m_1 - \frac{1}{2}m_2\right) \cdot (3).$$

Les pièces graduées sont données par

$$A_0[\mathfrak{D}] = \bigoplus_{(m_1,m_2)\in\omega_{\mathbb{Z}^2}} H^0(Y, \mathcal{O}_Y(\lfloor \mathfrak{D}(m_1, m_2)\rfloor))\, x^{m_1}y^{m_2}$$

où $Y = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$. En fait,

$$A_0[\mathfrak{D}] = \mathbb{Z}\left[\frac{1}{9}\,x,\ \frac{2}{3}\,xy,\ \frac{2}{3}\,xy^2\right]. \tag{4.1}$$

En effet, soit $(m_1, m_2) \in \omega_{\mathbb{Z}^2}$ et supposons que $m_2 = 2r$ est pair. Alors l'entier $m_1 - r$ est positif. La pièce graduée $A_{(m_1,m_2)}$ de $A_0[\mathfrak{D}]$ correspondante au couple (m_1, m_2) est

$$A_{(m_1,m_2)} = \mathbb{Z}\,\frac{2^r}{3^{2m_1-r}}\,x^{m_1}y^{m_2} = \mathbb{Z}\left(\frac{1}{9}\,x\right)^{m_1-r} \cdot \left(\frac{2}{3}\,xy^2\right)^r.$$

Supposons que $m_2 = 2r + 1$ est impair. Alors $m_1 - (r + 1) \geq 0$ et

$$A_{(m_1,m_2)} = \mathbb{Z}\,\frac{2^{r+1}}{3^{2m_1-(r+1)}}\,x^{m_1}y^{m_2} = \mathbb{Z}\,\frac{2}{3}\,xy \cdot \left(\frac{1}{9}\,x\right)^{m_1-(r+1)} \cdot \left(\frac{2}{3}\,xy^2\right)^r.$$

Ainsi, toutes les pièces graduées de $A_0[\mathfrak{D}]$ sont engendrées par les éléments $\frac{1}{9}\,x, \frac{2}{3}\,xy$, $\frac{2}{3}\,xy^2$. On conclut que l'égalité (4.1) est vraie.

Dans l'exemple suivant, l'anneau de Dedekind A_0 n'est pas principal.

Exemple 4.4.6. Pour un corps de nombres K, le groupe des classes $\mathrm{Cl}\, K$ est le quotient du groupe des idéaux fractionnaires de l'anneau des entiers de K par le sous-groupe des idéaux fractionnaires principaux. En d'autres termes, $\mathrm{Cl}\, K = \mathrm{Pic}\, Y$ où $Y = \mathrm{Spec}\, \mathbb{Z}_K$ est le schéma affine associé à l'anneau des entiers de K. Il est connu que le groupe $\mathrm{Cl}\, K$ est fini. De plus, l'anneau $\mathbb{Z}_K$ est principal si et seulement si $\mathrm{Cl}\, K$ est trivial.

Donnons un exemple où $\mathbb{Z}_K$ n'est pas principal. Posons $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-5})$. Alors $\mathbb{Z}_K = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ et le groupe $\mathrm{Cl}\, K$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Un ensemble de représentants dans $\mathrm{Cl}\, K$ est donné par les idéaux fractionnaires $\mathfrak{a} = (2,\, 1 + \sqrt{-5})$ et $\mathbb{Z}_K$. Étant données x, y deux variables indépendantes sur K, considérons l'anneau $\mathbb{Z}^2$-gradué

$$A = \mathbb{Z}_K \left[\, 3\, x^2 y,\, 2\, y,\, 6\, x\, \right].$$

Décrivons la normalisation de A. En désignant respectivement par $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ les idéaux premiers $(3,\, 1 + \sqrt{-5})$ et $(3,\, 1 - \sqrt{-5})$, nous avons les décompositions

$$(2) = \mathfrak{a}^2, \;\; (3) = \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c}.$$

Observons que les idéaux $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ sont distincts. Ainsi,

$$\mathrm{div}\, 2 = 2 \cdot \mathfrak{a} \;\text{ et }\; \mathrm{div}\, 3 = \mathfrak{b} + \mathfrak{c},$$

où $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ sont vus comme des points fermés de $Y = \mathrm{Spec}\, \mathbb{Z}_K$. Soit $\mathfrak{D}$ le diviseur polyédral sur $\mathbb{Z}_K$ donné par $\Delta_{\mathfrak{a}} \cdot \mathfrak{a} + \Delta_{\mathfrak{b}} \cdot \mathfrak{b} + \Delta_{\mathfrak{c}} \cdot \mathfrak{c}$ avec coefficients polyédraux

$$\Delta_{\mathfrak{a}} = \left\{ (v_1, v_2) \in \mathbb{Q}^2 \,|\, 2v_1 + v_2 \geq 0,\, v_2 \geq -2,\, v_1 \geq -2 \right\} \;\text{ et}$$

$$\Delta_{\mathfrak{b}} = \Delta_{\mathfrak{c}} = \left\{ (v_1, v_2) \in \mathbb{Q}^2 \,|\, 2v_1 + v_2 \geq -1,\, v_2 \geq 0,\, v_1 \geq -1 \right\}.$$

Par le théorème 4.4.4, nous obtenons $\bar{A} = A_0[\mathfrak{D}]$ où $A_0 = \mathbb{Z}_K$. Le cône des poids de A est le premier quadrant $\omega = (\mathbb{Q}_{\geq 0})^2$. Un calcul aisé montre que pour tous $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$,

$$\mathfrak{D}(m_1, m_2) = \min\left(m_1 - 2m_2,\, -2m_1 + 4m_2\right) \cdot \mathfrak{a} + \min\left(-\frac{m_1}{2},\, -m_1 + m_2\right) \cdot (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}).$$

En posant

$$\omega_1 = \mathbb{Q}_{\geq 0}(0,1) + \mathbb{Q}_{\geq 0}(2,1) \;\text{ et }\; \omega_2 = \mathbb{Q}_{\geq 0}(2,1) + \mathbb{Q}_{\geq 0}(1,0),$$

sur le cône ω_1, nous avons

$$\mathfrak{D}(m_1, m_2) = (m_1 - 2m_2) \cdot \mathfrak{a} - \frac{m_1}{2} \cdot (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}),$$

et sur ω_2, il vient

$$\mathfrak{D}(m_1, m_2) = (-2m_1 + 4m_2) \cdot \mathfrak{a} + (-m_1 + m_2) \cdot (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}).$$

Pour $i = 1, 2$, nous posons aussi

$$A_{\omega_i} = \bigoplus_{(m_1,m_2) \in \omega_i \cap \mathbb{Z}^2} A_{(m_1,m_2)}$$

comme étant la somme des pièces graduées de $A_0[\mathfrak{D}]$ correspondantes au monoïde $\omega_i \cap \mathbb{Z}^2$. Alors A_{ω_2} est engendrée comme algèbre sur $\mathbb{Z}_K$ par les éléments $6x$ et $3x^2y$. Fixons un couple $(m_1, m_2) \in \omega_1 \cap \mathbb{Z}^2$. Si $m_1 = 2r$ est pair alors $r - m_1 \leq 0$. Il s'ensuit que

$$A_{(m_1,m_2)} = \mathbb{Z}_K \left(3\,xy^2\right)^r \cdot (2\,y)^{m_2 - r}.$$

D'un autre côté, si $m_1 = 2r + 1$ est impair alors $m_2 - r - 1 \geq 0$ et $A_{(m_1,m_2)}$ est l'idéal de $\mathbb{Z}_K$ engendré par les éléments

$$\left(3\,xy^2\right)^r \cdot (2\,y)^{m_2-r-1} \cdot (3(1 + \sqrt{-5})\,xy), \quad \left(3\,xy^2\right)^r \cdot (2\,y)^{m_2-r-1} \cdot 6\,xy.$$

On conclut que

$$\bar{A} = A_0[\mathfrak{D}] = \mathbb{Z}_K \left[\, 2\,y,\ 6\,xy,\ 3(1 + \sqrt{-5})\,xy,\ 3\,x^2y,\ 6x \,\right].$$

Pour la démonstration du théorème 4.4.4, nous avons besoin de quelques résultats préliminaires. Nous commençons par rappeler un fait bien connu [GY, 1.1] donnant une équivalence entre les propriétés noethérienne et de finitude d'une algèbre multigraduée. Notons que le prochain résultat ne se généralise pas pour la classe des algèbres graduées par un groupe abélien G arbitraire ; un contre-exemple est construit dans [GY, 3.1].

Théorème 4.4.7. *Soient G groupe abélien de type fini dont la loi est notée additivement et A un anneau G-gradué. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *L'anneau A est noethérien.*

(ii) *La pièce graduée A_0 correspondante à l'élément neutre de G est un anneau noethérien et l'algèbre A est de type fini sur A_0.*

Le prochain lemme nous permet de montrer que l'anneau $A_0[\mathfrak{D}]$, provenant d'un diviseur polyédral $\mathfrak{D}$ sur un anneau de Dedekind A_0, est noethérien.

Lemme 4.4.8. *Soient $D_1, \ldots, D_r$ des diviseurs de Weil rationnels sur le schéma affine $Y = \operatorname{Spec} A_0$. Alors l'algèbre $\mathbb{Z}^r$-graduée*

$$B = \bigoplus_{(m_1,\ldots,m_r)\in\mathbb{N}^r} H^0\left(Y, \mathcal{O}_Y\left(\left\lfloor \sum_{i=1}^{r} m_i D_i \right\rfloor\right)\right)$$

est de type fini sur A_0.

Démonstration. Soit $d \in \mathbb{Z}_{>0}$ tel que pour chaque $i = 1, \ldots, r$, le diviseur de Weil dD_i est entier. Considérons le polytope entier

$$Q = \{\, (m_1, \ldots, m_r) \in \mathbb{Q}^r \mid 0 \leq m_i \leq d,\, i = 1, \ldots, r \,\}.$$

Le sous-ensemble $Q \cap \mathbb{N}^r$ étant de cardinal fini, le module

$$E := \bigoplus_{(m_1,\ldots,m_r)\in\mathbb{N}^r\cap Q} H^0\left(Y, \mathcal{O}_Y\left(\left\lfloor \sum_{i=1}^{r} m_i D_i \right\rfloor\right)\right)$$

est de type fini sur A_0 (voir l'assertion 4.3.5). Soit $(m_1, \ldots, m_r) \in \mathbb{N}^r$. Écrivons $m_i = dq_i + r_i$ avec $q_i, r_i \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq r_i < d$. L'égalité

$$\left\lfloor \sum_{i=1}^{r} m_i D_i \right\rfloor = \sum_{i=1}^{r} q_i \lfloor dD_i \rfloor + \left\lfloor \sum_{i=1}^{r} r_i D_i \right\rfloor$$

implique que tout élément homogène de B peut être exprimé comme un polynôme en les éléments de E. Si $f_1, \ldots, f_s$ engendrent le module E sur A_0 alors nous avons $A = A_0[f_1, \ldots, f_s]$. Cela montre notre assertion. $\square$

Ensuite, nous donnons une démonstration de la première partie du théorème 4.4.4.

Démonstration. Posons $A = A_0[\mathfrak{D}]$. Par le théorème 4.3.4, toute pièce graduée de A correspondant au vecteur $m \in \sigma_M^\vee$ a au moins un élément non nul. Puisque que le cône des poids $\sigma^\vee$ est d'intérieur non vide les algèbres A et $K_0[M]$ ont donc le même corps des fractions.

Montrons que A est un anneau normal. Pour cela nous adaptons l'argument habituel au cas multigradué. Étant donnés un point fermé $z \in Z$ et un élément $v \in \Delta_z$, considérons l'application

$$\nu_{z,v} : K_0[M] - \{0\} \to \mathbb{Z}$$

définie comme suit. Soit $\alpha \in K_0[M]$ un élément non nul ayant pour décomposition en homogènes

$$\alpha = \sum_{i=1}^{r} f_i \chi^{m_i} \text{ avec } f_i \in K_0^{\star}.$$

Alors nous posons

$$\nu_{z,v}(\alpha) = \min_{1 \leq i \leq r} \{\operatorname{ord}_z f_i + \langle m_i, v \rangle\}.$$

L'application $\nu_{z,v}$ définit une valuation discrète sur le corps $\operatorname{Frac} A$. Désignons par $\mathcal{O}_{v,z}$ l'anneau local associé. Par définition de l'algèbre $A_0[\mathfrak{D}]$, on a

$$A = K_0[M] \cap \bigcap_{z \in Z} \bigcap_{v \in \Delta_z} \mathcal{O}_{v,z}$$

et A est normal comme intersection d'anneaux normaux avec corps des fractions $\operatorname{Frac} A$.

Il reste à montrer que A est noethérien. Par le théorème de la base de Hilbert, il suffit de montrer que A est de type fini sur A_0. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_e \subset \sigma^\vee$ des cônes polyédraux réguliers d'intérieur non vide formant une subdivision de $\sigma^\vee$ et tels que pour chaque $i = 1, \ldots, e$, l'application évaluation

$$\sigma^\vee \to \operatorname{Div}_{\mathbb{Q}}(Y), \quad m \mapsto \mathfrak{D}(m)$$

est linéaire sur λ_i. Fixons $i \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq i \leq e$. Considérons les éléments distincts $v_1, \ldots, v_n$ de la partie génératrice minimale (base de Hilbert)[4] du monoïde $\lambda_i \cap M$. Désignons par A_{λ_i} l'algèbre

$$\bigoplus_{m \in \lambda_i \cap M} H^0(Y, \mathcal{O}_Y(\lfloor \mathfrak{D}(m) \rfloor)\chi^m.$$

Alors les vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ forment une base du réseau M et donc nous avons un isomorphisme d'algèbres

$$A_{\lambda_i} \simeq \bigoplus_{(m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{N}^n} H^0\left(Y, \mathcal{O}_Y\left(\left\lfloor \sum_{i=1}^{n} m_i\, \mathfrak{D}(v_i) \right\rfloor\right)\right).$$

4. On peut montrer qu'il existe une et seule partie génératrice minimale pour l'inclusion de tout monoïde provenant d'un cône polyédral saillant [CLS, 1.2]. Cette partie génératrice est un ensemble fini en vertu du lemme de Gordan.

Par le lemme 4.4.8, l'algèbre A_{λ_i} est de type fini sur A_0. L'application surjective

$$A_{\lambda_1} \otimes \ldots \otimes A_{\lambda_e} \to A$$

montre que A est également de type fini. $\square$

Pour la deuxième partie du théorème 4.4.4, nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 4.4.9. *Supposons que A vérifie les hypothèses de l'énoncé* 4.4.4 (ii)*. Alors les assertions suivantes sont vraies.*

(i) *Pour chaque $m \in \sigma_M^\vee$, nous avons $A_m \neq \{0\}$. En d'autres termes, le monoïde des poids de l'algèbre M-graduée A est exactement $\sigma_M^\vee$.*

(ii) *Si $L \subset M_\mathbb{Q}$ est un cône polyédral contenu dans $\sigma^\vee$ alors l'anneau*

$$A_L := \bigoplus_{m \in L \cap M} A_m \chi^m$$

est normal et noethérien.

Démonstration. Soit

$$S = \{m \in \sigma_M^\vee,\, A_m \neq \{0\}\}$$

le monoïde des poids de A. Supposons que $S \neq \sigma_M^\vee$. Alors il existe $e \in \mathbb{Z}_{>0}$ et $m \in M$ tels que $m \notin S$ et $e \cdot m \in S$. Puisque A est un anneau noethérien, par [GY, Lemma 2.2] le module A_{em} sur l'anneau A_0 est un idéal fractionnaire de A_0. Par le théorème 4.3.4, nous obtenons l'égalité

$$A_{em} = H^0(Y, \mathcal{O}_Y(D_{em})),$$

pour un diviseur de Weil entier $D_{em} \in \mathrm{Div}_\mathbb{Z}(Y)$. Soit f une section non nulle de

$$H^0\left(Y, \mathcal{O}_Y\left(\left\lfloor \frac{D_{em}}{e} \right\rfloor\right)\right).$$

Cet élément existe en vertu du théorème 4.3.4. Nous avons les inégalités

$$\mathrm{div}\, f^e \geq -e \left\lfloor \frac{D_{em}}{e} \right\rfloor \geq -D_{em}.$$

La normalité de A implique $f \in A_m$. Cela contredit notre hypothèse et donne (i).

Pour la deuxième assertion, nous notons que par 4.4.7 et par l'argument de démonstration de [AH, Lemma 4.1], l'algèbre A_L est noethérienne.

Il reste à montrer que A_L est normal. Soit $\alpha \in \mathrm{Frac}\, A_L$ un élément entier sur A_L. Par normalité de A et de $K_0[\chi^m]$, nous obtenons $\alpha \in A \cap K_0[\chi^m] = A_L$ et donc A_L est normal. $\square$

Dans la suite, nous introduisons quelques notations utiles de géométrie convexe.

Notation 4.4.10. Soient

$$(m_i, e_i),\ i = 1, \ldots, r,$$

des éléments de $M \times \mathbb{Z}$ tels que les vecteurs $m_1, \ldots, m_r$ sont non nuls et engendrent le réseau M. Alors le cône $\omega = \mathrm{Cone}(m_1, \ldots, m_r)$ est de pleine dimension dans $M_{\mathbb{Q}}$. Considérons le $\omega^\vee$-polyèdre

$$\Delta = \{\, v \in N_{\mathbb{Q}},\ \langle m_i, v\rangle \geq -e_i,\ i = 1, 2, \ldots, r \,\}.$$

Soit $L = \mathbb{Q}_{\geq 0} \cdot m$ un cône de dimension 1 contenu dans ω avec vecteur primitif m. En d'autres termes, l'élément m engendre le monoïde $L \cap M$. Désignons par $\mathscr{H}_L$ la base de Hilbert dans le réseau $\mathbb{Z}^r$ du cône polyédral saillant non nul

$$p^{-1}(L) \cap (\mathbb{Q}_{\geq 0})^r, \quad \text{avec} \quad p : \mathbb{Q}^r \to M_{\mathbb{Q}}.$$

L'application linéaire p envoie la base canonique sur la famille de vecteurs $(m_1, \ldots, m_r)$. Nous posons

$$\mathscr{H}_L^\star = \left\{ (s_1, \ldots, s_r) \in \mathscr{H}_L\,,\ \sum_{i=1}^r s_i \cdot m_i \neq 0 \right\}.$$

Pour chaque vecteur $(s_1, \ldots, s_r) \in \mathscr{H}_L^\star$, il existe un unique entier $\lambda(s_1, \ldots, s_r) \in \mathbb{Z}_{>0}$ tel que

$$\sum_{i=1}^r s_i \cdot m_i = \lambda(s_1, \ldots, s_r) \cdot m.$$

Les arguments de la démonstration du lemme suivant utilisent seulement des faits élémentaires d'algèbre commutative et de géométrie convexe. Ils permettent d'obtenir la présentation d'Altmann-Hausen énoncée dans le théorème 4.4.4 (ii).

Lemme 4.4.11. *Considérons les mêmes notations que dans* 4.4.10. *Posons* $h_\Delta(m) = \min_{v \in \Delta}\langle m, v\rangle$. *Nous avons l'égalité*

$$h_\Delta(m) = -\min_{(s_1,\ldots,s_r) \in \mathscr{H}_L^\star} \frac{\sum_{i=1}^r s_i \cdot e_i}{\lambda(s_1, \ldots, s_r)}.$$

Démonstration. Soit t une variable sur le corps $\mathbb{C}$. Considérons la sous-algèbre M-graduée

$$A = \mathbb{C}[t][t^{e_1}\chi^{m_1}, \ldots, t^{e_r}\chi^{m_r}] \subset \mathbb{C}(t)[M].$$

Le corps des fractions de A est le même que celui de $\mathbb{C}(t)[M]$. En utilisant les résultats de [Ho], la normalisation de l'algèbre A est

$$\bar{A} = \mathbb{C}[\omega_0 \cap (M \times \mathbb{Z})], \text{ avec } \omega_0 \subset M_{\mathbb{Q}} \times \mathbb{Q}$$

le cône rationnel engendré par les vecteurs $(0,1), (m_1, e_1), \ldots, (m_r, e_r)$. En fait, un calcul direct montre que

$$\omega_0 = \{(w, -\min \langle w, \Delta\rangle + e) \mid w \in \omega,\, e \in \mathbb{Q}_{\geq 0}\}$$

et donc

$$\bar{A} = \bigoplus_{m\in\omega\cap M} H^0(\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}}(\lfloor h_{\Delta}(m)\rfloor \cdot 0))\chi^m$$

avec $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} = \operatorname{Spec}\mathbb{C}[t]$.

Le sous-réseau $G \subset M$ engendré par la partie $p(\mathscr{H}^{\star}_L)$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}\cdot m$. Par conséquent, il existe un unique entier $d \in \mathbb{Z}_{>0}$ tel que $G = d\,\mathbb{Z}\cdot m$. Pour un élément $m' \in \omega \cap M$, nous désignons par $A_{m'}$ (resp. $\bar{A}_{m'}$) la pièce graduée de A (resp. $\bar{A}$) correspondante à m'. Alors la normalisation $\bar{A}^{(d)}_L$ de l'algèbre

$$A^{(d)}_L := \bigoplus_{s\geq 0} A_{sdm}\chi^{sdm} \text{ est } B_L = \bigoplus_{s\geq 0} \bar{A}_{sdm}\chi^{sdm}.$$

De plus,

$$A_L = \bigoplus_{s\geq 0} A_{sm}\chi^{sm}$$

est engendrée comme algèbre sur $\mathbb{C}[t]$ par les éléments

$$f_{(s_1,\ldots,s_r)} := \prod_{i=1}^{r} (t^{e_i}\chi^{m_i})^{s_i} = t^{\sum_{i=1}^r s_i e_i}\chi^{\lambda(s_1,\ldots,s_r)m},$$

où $(s_1, \ldots, s_r)$ parcourt $\mathscr{H}^{\star}_L$. Par le choix de l'entier d, nous avons donc $A^{(d)}_L = A_L$. En considérant la G-graduation de $A^{(d)}_L$, pour tout $(s_1, \ldots, s_r) \in \mathscr{H}^{\star}_L$, l'élément $f_{(s_1,\ldots,s_r)}$ de l'anneau gradué $A^{(d)}_L$ a pour degré

$$\deg f_{(s_1,\ldots,s_r)} := \frac{\lambda(s_1,\ldots,s_r)}{d}\ .$$

En posant

$$D = -\min_{(s_1,\ldots,s_r)\in\mathscr{H}_L^\star} \frac{\operatorname{div} f_{(s_1,\ldots,s_r)}}{\deg f_{(s_1,\ldots,s_r)}} = -\min_{(s_1,\ldots,s_r)\in\mathscr{H}_L^\star} d\cdot\frac{\sum_{i=1}^r s_ie_i}{\lambda(s_1,\ldots,s_r)}\cdot 0,$$

par le corollaire 4.3.7, nous obtenons

$$\bar{A}_L^{(d)} = \bigoplus_{s\geq 0} H^0(\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}}(\lfloor sD\rfloor))\chi^{sdm}.$$

L'égalité $\bar{A}_L^{(d)} = B_L$ implique que pour tout entier $s\geq 0$,

$$H^0(\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}}(\lfloor h_\Delta(sd\cdot m)\rfloor\cdot 0)) = H^0(\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}}(\lfloor sD\rfloor)).$$

D'où par le lemme 4.3.6, il vient

$$D = h_\Delta(d\cdot m)\cdot 0.$$

En divisant par d, nous obtenons la formule désirée. □

Soit A une algèbre M-graduée satisfaisant les hypothèses de 4.4.4 (ii). En utilisant la présentation D.P.D. sur chaque cône de dimension 1 contenu dans le cône des poids $\sigma^\vee$ (voir le lemme 4.3.6), nous pouvons construire une application

$$\sigma^\vee \to \operatorname{Div}_{\mathbb{Q}}(Y),\quad m\mapsto D_m$$

à valeurs dans l'espace vectoriel des diviseurs de Weil rationnels de $Y = \operatorname{Spec} A_0$. Elle est convexe, positivement homogène et vérifie pour tout $m\in\sigma^\vee_M$,

$$A_m = H^0(C, \mathcal{O}_C(\lfloor D_m\rfloor)).$$

Par le lemme 4.4.11, cette application est linéaire par morceaux (voir [AH, 2.11]) ou de façon équivalente $m\mapsto D_m$ est l'application évaluation d'un diviseur polyédral. La démonstration suivante précise cette idée.

Démonstration de 4.4.4 (ii). Par l'assertion 4.4.7, nous pouvons considérer

$$f = (f_1\chi^{m_1},\ldots,f_r\chi^{m_r})$$

un système de générateurs homogènes de A avec des vecteurs non nuls $m_1,\ldots,m_r\in M$. Nous utilisons ici la même notation que dans 4.4.3. Désignons alors par $\mathfrak{D}$ le diviseur σ-polyédral $\mathfrak{D}[f]$. Montrons que $A = A_0[\mathfrak{D}]$. Soient $L = \mathbb{Q}_{\geq 0}\cdot m$ un cône de dimension

1 contenu dans $\omega = \sigma^\vee$ et m le vecteur primitif de L pour le réseau M. Par le lemme 4.4.9, la sous-algèbre graduée

$$A_L := \bigoplus_{m' \in L \cap M} A_{m'}\chi^{m'} \subset K_0[\chi^m]$$

est normale, noethérienne et a le même corps des fractions que celui de $K_0[\chi^m]$. De plus, avec les mêmes notations que dans le paragraphe 4.4.10, l'algèbre A_L est engendrée par l'ensemble

$$\left\{ \prod_{i=1}^{r} (f_i\chi^{m_i})^{s_i},\ (s_1, \ldots, s_r) \in \mathscr{H}_L^\star \right\}.$$

Par le corollaire 4.3.7, si on a

$$D_m := - \min_{(s_1,\ldots,s_r) \in \mathscr{H}_L^\star} \frac{\sum_{i=1}^r s_i \operatorname{div} f_i}{\lambda(s_1, \ldots, s_r)}$$

alors par rapport à la variable χ^m, on a $A_L = A_0[D_m]$. Par le lemme 4.4.11, pour tout point fermé $z \in Z$,

$$h_{\Delta_z[f]}(m) = - \min_{(s_1,\ldots,s_r) \in \mathscr{H}_L^\star} \frac{\sum_{i=1}^r s_i \operatorname{ord}_z f_i}{\lambda(s_1, \ldots, s_r)}\ .$$

Ce qui entraîne $\mathfrak{D}(m) = D_m$. Puisque l'égalité est vraie pour tout vecteur primitif d'un cône de dimension 1 contenu dans $\sigma^\vee$, on conclut que $A = A_0[\mathfrak{D}]$. L'unicité de $\mathfrak{D}$ est aisée. $\square$

En utilisant des faits connus sur les anneaux de Dedekind nous obtenons l'assertion suivante.

Proposition 4.4.12. *Soient A_0 un anneau de Dedekind et B_0 la fermeture intégrale de A_0 dans une extension séparable finie L_0/K_0, où $K_0 = \operatorname{Frac} A_0$. Soit $\mathfrak{D} = \sum_{z \in Z} \Delta_z \cdot z$ un diviseur polyédral sur A_0 où $Z \subset Y = \operatorname{Spec} A_0$ est l'ensemble des points fermés. En posant $Y' = \operatorname{Spec} B_0$ et en considérant la projection naturelle $p : Y' \to Y$, l'anneau B_0 est de Dedekind et nous avons la formule*

$$A_0[\mathfrak{D}] \otimes_{A_0} B_0 = B_0[p^\star\mathfrak{D}] \ \text{ avec } \ p^\star\mathfrak{D} = \sum_{z \in Z} \Delta_z \cdot p^\star(z).$$

Donnons un exemple pour illustrer l'assertion précédente.

Exemple 4.4.13. Considérons le diviseur polyédral

$$\mathfrak{D} = \Delta_{(t)} \cdot (t) + \Delta_{(t^2+1)} \cdot (t^2+1)$$

sur l'anneau de Dedekind $A_0 = \mathbb{R}[t]$ avec coefficients polyédraux

$$\Delta_{(t)} = (-1, 0) + \sigma, \;\; \Delta_{(t^2+1)} = [(0,0), (0,1)] + \sigma,$$

et $\sigma \subset \mathbb{Q}^2$ est le cône polyédral engendré par les vecteurs $(1,0)$ et $(1,1)$. Un calcul aisé montre que

$$A_0[\mathfrak{D}] = \mathbb{R}\left[t, -t\chi^{(1,0)}, \chi^{(0,1)}, t(t^2+1)\chi^{(1,-1)}\right] \simeq \frac{\mathbb{R}[x_1, x_2, x_3, x_4]}{((1+x_1^2)x_2 + x_3x_4)},$$

où x_1, x_2, x_3, x_4 sont des variables indépendantes sur $\mathbb{R}$. Posons $\zeta = \sqrt{-1}$. En considérant la projection naturelle $p : \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}$, nous obtenons

$$p^\star\mathfrak{D} = \Delta_0 \cdot 0 + \Delta_{(t^2+1)} \cdot \zeta + \Delta_{(t^2+1)} \cdot (-\zeta).$$

En posant $B_0 = \mathbb{C}[t]$, on conclut que $A_0[\mathfrak{D}] \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = B_0[p^\star\mathfrak{D}]$ est le complexifié de $A_0[\mathfrak{D}]$.

4.5 Algèbres multigraduées elliptiques et corps de fonctions algébriques d'une variable

Dans cette section, nous étudions un autre type d'algèbres multigraduées. Ces algèbres sont décrites par un diviseur polyédral propre sur un corps de fonctions algébriques d'une variable. Fixons un corps quelconque $\mathbf{k}$. Rappelons une définition classique.

4.5.1. Un *corps de fonctions algébriques* (sous-entendu d'une variable) sur le corps $\mathbf{k}$ est une extension de corps $K_0/\mathbf{k}$ vérifiant les conditions suivantes.

(i) Le degré de transcendance de K_0 sur $\mathbf{k}$ est égal à 1.

(ii) Tout élément de K_0 qui est algébrique sur le sous-corps $\mathbf{k}$ appartient à $\mathbf{k}$.

(iii) Il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in K_0$ tels que $K_0 = \mathbf{k}(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$.

En vertu de notre convention sur les variétés algébriques, une courbe projective régulière C sur $\mathbf{k}$ donne naturellement un corps de fonctions algébriques $K_0/\mathbf{k}$ en posant $K_0 = \mathbf{k}(C)$. Comme application directe du critère valuatif de propreté (voir

[EGA II, Section 7.4]), tout corps de fonctions algébriques $K_0/\mathbf{k}$ est le corps des fonctions rationnelles (unique à isomorphisme près) d'une courbe projective régulière C sur $\mathbf{k}$. Dans le prochain paragraphe, nous rappelons comment on construit la courbe C en partant d'un corps de fonctions algébriques K_0.

4.5.2. Rappelons qu'un *anneau de valuation* dans K_0 est un sous-anneau propre de $\mathcal{O} \subset K_0$ contenant strictement $\mathbf{k}$ et tel que pour tout élément non nul $f \in K_0$, soit on a $f \in \mathcal{O}$ soit on a $\frac{1}{f} \in \mathcal{O}$. Par [St, 1.1.6] tout anneau de valuation dans K_0 est l'anneau associé à une valuation discrète de $K_0/\mathbf{k}$. Un sous-ensemble $P \subset K_0$ est appelé une *place* de K_0 s'il existe un anneau de valuation $\mathcal{O}$ de K_0 tel que P est l'idéal maximal de $\mathcal{O}$. Nous désignons par $\mathscr{R}_{\mathbf{k}}\, K_0$ l'ensemble de toutes les places de K_0. Cette dernière est souvent appelée la *surface de Riemann* de K_0. Par [EGA II, 7.4.18] l'ensemble $\mathscr{R}_{\mathbf{k}}\, K_0$ peut être muni d'une structure de courbe projective C sur le corps $\mathbf{k}$ tel que $K_0 = \mathbf{k}(C)$.

Désormais, nous considérons l'ensemble $C = \mathscr{R}_{\mathbf{k}}\, K_0$ avec sa structure de schéma. Par convention un élément z appartenant à C est un point fermé ; qui correspond exactement à une place de K_0. Nous notons par P_z la place associée à z.

4.5.3. Pour une place P de K_0, nous posons $\kappa(P) = \mathcal{O}/P$, où $\mathcal{O}$ est l'anneau de valuation de la place P. Le corps $\kappa(P)$ est une extension finie de $\mathbf{k}$ [St, 1.1.15] et nous l'appelons le *corps résiduel* de P. Nous posons également $\kappa_z = \kappa(P_z)$. Pour une fonction rationnelle $f \in \mathbf{k}(C)^\star$, son *diviseur principal* associé est

$$\operatorname{div} f = \sum_{z \in C} \operatorname{ord}_z f \cdot z,$$

où $\operatorname{ord}_z f$ est la valeur en f de la valuation correspondante à P_z. Rappelons que le *degré* d'un diviseur de Weil rationnel $D = \sum_{z\in C} a_z \cdot z$ est le nombre rationnel

$$\deg D = \sum_{z \in C} [\kappa_z : \mathbf{k}]\, a_z.$$

Par le théorème 1.4.11 dans [St], nous avons $\deg \operatorname{div} f = 0$.

4.5.4. Soient M, N des réseaux duaux et $\sigma \subset N_{\mathbb{Q}}$ un cône polyédral saillant. Un *diviseur σ-polyédral* sur K_0 (ou sur C) est une somme formelle $\mathfrak{D} = \sum_{z\in C} \Delta_z \cdot z$ avec $\Delta_z \in \operatorname{Pol}_\sigma(N_{\mathbb{Q}})$ et $\Delta_z = \sigma$ pour tout $z \in C$ en dehors d'un sous-ensemble fini. Nous considérons aussi la *fonction évaluation*

$$\mathfrak{D}(m) = \sum_{z \in C} h_{\Delta_z}(m) \cdot z\,;$$

qui est un diviseur de Weil rationnel sur la courbe C. Le *degré* de $\mathfrak{D}$ est la somme de Minkowski

$$\deg \mathfrak{D} = \sum_{z\in C} [\kappa_z : \mathbf{k}] \cdot \Delta_z.$$

Étant donné $m \in \sigma^\vee$, nous avons naturellement la relation $h_{\deg \mathfrak{D}}(m) = \deg \mathfrak{D}(m)$.

Nous pouvons maintenant introduire la notion de propreté des diviseurs polyédraux. Voir [AH, 2.7, 2.12] pour d'autres cas particuliers.

Définition 4.5.5. Un diviseur σ-polyédral $\mathfrak{D} = \sum_{z\in C} \Delta_z \cdot z$ est dit *propre* s'il satisfait les assertions suivantes

(i) Le polyèdre $\deg \mathfrak{D}$ est strictement inclus dans le cône σ.

(ii) Si on a $\deg \mathfrak{D}(m) = 0$ alors le vecteur m appartient au bord de $\sigma^\vee$ et un multiple entier non nul de $\mathfrak{D}(m)$ est un diviseur principal.

Notre résultat principal donne une description analogue à 4.4.4, mais celui-ci concerne les corps de fonctions algébriques. Pour l'assertion 4.5.6 (iii), nous renvoyons le lecteur aux arguments de démonstration de 3.4.4.

Théorème 4.5.6. *Soient* $\mathbf{k}$ *un corps et* $C = \mathscr{R}_{\mathbf{k}} K_0$ *la surface de Riemann d'un corps de fonctions algébriques d'une variable* $K_0/\mathbf{k}$. *Alors les assertions suivantes sont vraies.*

(i) *Soit*

$$A = \bigoplus_{m\in\sigma_M^\vee} A_m\chi^m \subset K_0[M]$$

une sous-algèbre M*-graduée normale noethérienne sur* $\mathbf{k}$ *de cône des poids* $\sigma^\vee$. *On suppose que pour tout* $m \in \sigma_M^\vee$, $A_m \subset K_0$ *et que* $A_0 = \mathbf{k}$. *Si* A *et* $K_0[M]$ *ont le même corps des fractions alors il existe un unique diviseur* σ*-polyédral propre* $\mathfrak{D}$ *sur la courbe* C *tel que* $A = A[C, \mathfrak{D}]$, *où*

$$A[C, \mathfrak{D}] = \bigoplus_{m\in\sigma_M^\vee} H^0(C, \mathcal{O}_C(\lfloor \mathfrak{D}(m) \rfloor))\chi^m.$$

(ii) *Soit* $\mathfrak{D}$ *un diviseur* σ*-polyédral propre sur* C. *Alors l'algèbre* $A = A[C, \mathfrak{D}]$ *est* M*-graduée, normale, de type fini sur* $\mathbf{k}$ *et a le même corps des fractions que* $K_0[M]$. *Le cône* $\sigma^\vee$ *est le cône des poids de* A.

(iii) *De façon plus explicite, soit*

$$A = \mathbf{k}[f_1\chi^{m_1}, \ldots, f_r\chi^{m_r}]$$

une sous-algèbre M*-graduée de* $K_0[M]$ *avec* $f_1, \ldots, f_r \in \mathbf{k}(C)^\star$ *et* $m_1, \ldots, m_r \in M$ *non nuls engendrant un cône rationnel* $\sigma^\vee$*. Posons* $f = (f_1\chi^{m_1}, \ldots, f_r\chi^{m_r})$*. Supposons que* A *et* $K_0[M]$ *aient le même corps des fractions. Alors le cône* $\sigma \subset N_\mathbb{Q}$ *est polyédral saillant,* $\mathfrak{D}[f]$ *est un diviseur* σ*-polyédral propre sur* C *et* $\bar{A} = A[C, \mathfrak{D}[f]]$ *(voir la notation* 4.4.3*).*

Pour la démonstration de 4.5.6, nous avons besoin de quelques préliminaires. Nous commençons par donner quelques résultats sur les sous-algèbres A_L de l'algèbre M-graduée A satisfaisant les hypothèses de l'énoncé 4.5.6 (i).

Lemme 4.5.7. *Soit* A *une algèbre* M*-graduée satisfaisant les hypothèses de* 4.5.6 (i)*. Étant donné un cône* $L = \mathbb{Q}_{\geq 0} \cdot m \subset \sigma^\vee$ *de dimension* 1 *avec vecteur primitif* m*, considérons la sous-algèbre*

$$A_L = \bigoplus_{m' \in L \cap M} A_{m'}\chi^{m'}.$$

Posons aussi

$$Q(A_L)_0 = \left\{ \frac{a}{b} \mid \, a \in A_{sm},\, b \in A_{sm},\, b \neq 0,\, s \geq 0 \right\}.$$

Alors les assertions suivantes sont vraies.

(i) *L'algèbre* A_L *est normale et de type fini sur* $\mathbf{k}$*.*

(ii) *Soit on a* $Q(A_L)_0 = \mathbf{k}$*, soit on a* $Q(A_L)_0 = K_0$*.*

(iii) *Si* $Q(A_L)_0 = \mathbf{k}$ *alors il existe* $\beta \in K_0^\star$ *et* $d \in \mathbb{Z}_{>0}$ *tels que* $A_L = \mathbf{k}[\beta\chi^{dm}]$*.*

Démonstration. La démonstration de l'assertion (i) est analogue à celle de 4.4.9 (ii) et donc nous l'omettons.

Le corps $Q(A_L)_0$ est une extension de $\mathbf{k}$ contenue dans K_0. Si le degré de transcendance de $Q(A_L)_0$ sur $\mathbf{k}$ est 0 alors par normalité de A_L, $Q(A_L)_0 = \mathbf{k}$. Nous supposons que nous sommes dans le cas contraire, à savoir, l'extension $K_0/Q(A_L)_0$ est algébrique. Soit $\alpha \in K_0$. Alors il existe des éléments $a_1, \ldots, a_d \in Q(A_L)_0$ avec $a_d \neq 0$ tels que

$$\alpha^d = \sum_{j=1}^{d} a_j\alpha^{d-j}.$$

Posons

$$I = \{i \in \{1, \dots, d\},\ a_i \neq 0\}.$$

Pour tout $i \in I$, nous écrivons $a_i = \frac{p_i}{q_i}$, avec $p_i, q_i \in A_L$ des éléments homogènes de même degré. En considérant $q = \prod_{i\in I} q_i$, nous obtenons

$$(\alpha q)^d = \sum_{j=1}^{d} a_j q^j (\alpha q)^{d-j}.$$

La normalité de A_L donne $\alpha q \in A_L$. Cela montre que $\alpha = \alpha q/q \in Q(A_L)_0$.

Pour montrer l'assertion (iii), nous considérons $S \subset \mathbb{Z} \cdot m$ le cône des poids de l'algèbre graduée A_L. Puisque L est contenu dans le cône des poids $\sigma^\vee$, le monoïde S est non trivial. Par conséquent, si G est le sous-groupe engendré par S alors il existe un unique entier $d \in \mathbb{Z}_{>0}$ tel que $G = \mathbb{Z}\, d \cdot m$. En posant $u = \chi^{dm}$, nous pouvons écrire

$$A_L = \bigoplus_{s \geq 0} A_{sdm} u^s.$$

Ainsi, pour des éléments homogènes de même degré $a_1 u^l, a_2 u^l \in A_L$, nous avons $\frac{a_1}{a_2} \in Q(A_L)_0^\star = \mathbf{k}^\star$ de sorte que

$$A_L = \bigoplus_{s \in S'} k f_s\, u^s,$$

où $S' := \frac{1}{d} S$ et $f_s \in \mathbf{k}(C)^\star$. Fixons des éléments homogènes $f_{s_1} u^{s_1}, \dots, f_{s_r} u^{s_r}$ formant un sous-ensemble générateur de l'algèbre G-graduée A_L. Considérons $d' :=$ p.g.c.d.$(s_1, \dots, s_r)$. Si $d' > 1$ alors l'inclusion $S \subset dd'\,\mathbb{Z} \cdot m$ donne une contradiction. Donc $d' = 1$ et il existe des entiers $l_1, \dots, l_r$ tels que $1 = \sum_{i=1}^r l_i s_i$. L'élément

$$\beta u = \prod_{i=1}^{r} (f_{s_i} u^{s_i})^{l_i}$$

vérifie alors

$$\frac{(\beta u)^{s_1}}{f_{s_1} u^{s_1}} \in Q(A_L)_0^\star = \mathbf{k}^\star.$$

Par normalité de A_L, on a $\beta u \in A_L$ et donc $A_L = \mathbf{k}[\beta u] = \mathbf{k}[\beta \chi^{dm}]$. Cela établit l'assertion (iii). □

Le lemme suivant est bien connu ; voir par exemple [De 2, Section 3], [Liu, §7.4.1, Proposition 4.4] et l'argument de démonstration de [AH, 9.1].

Lemme 4.5.8. *Soient D_1, D_2, D des diviseurs de Weil rationnels sur la courbe C. Alors les assertions suivantes sont vraies.*

(i) *Si le degré de D est strictement positif alors il existe $d \in \mathbb{Z}_{>0}$ tel que le faisceau inversible $\mathcal{O}_C(\lfloor dD \rfloor)$ de $\mathcal{O}_C$-modules est très ample. De plus, l'algèbre graduée*

$$B = \bigoplus_{l \geq 0} H^0(C, \mathcal{O}_C(\lfloor lD \rfloor))t^l,$$

où t est une variable sur $K_0 = \mathbf{k}(C)$, est de type fini sur $\mathbf{k}$. Le corps des fractions de B est $\mathbf{k}(C)(t)$.

(ii) *Supposons que pour $i = 1, 2$, nous avons soit $\deg D_i > 0$ ou soit rD_i est un diviseur principal, pour $r \in \mathbb{Z}_{>0}$. Si pour tout $s \in \mathbb{N}$, on a l'inclusion*

$$H^0(C, \mathcal{O}_C(\lfloor sD_1 \rfloor)) \subset H^0(C, \mathcal{O}_C(\lfloor sD_2 \rfloor))$$

alors on a l'inégalité $D_1 \leq D_2$.

Dans le prochain corollaire, nous gardons les mêmes notations que dans le lemme 4.5.7. En utilisant le théorème de Demazure (voir [De 2, théorème 3.5]) pour les algèbres graduées normales, nous montrons que chaque A_L admet une présentation D.P.D. sur une même courbe projective régulière.

Corollaire 4.5.9. *Il existe un unique diviseur de Weil rationnel D sur C tel que*

$$A_L = \bigoplus_{s \geq 0} H^0(C, \mathcal{O}_C(\lfloor sD \rfloor))\chi^{sm}.$$

De plus, les assertions suivantes sont vraies.

(i) *Si $Q(A_L)_0 = \mathbf{k}$ alors il existe $f \in K_0^\star$ et $d \in \mathbb{Z}_{>0}$ tels que $D = \frac{\operatorname{div} f}{d}$.*

(ii) *Si $Q(A_L)_0 = K_0$ alors $\deg D > 0$.*

(iii) *Si $f_1\chi^{s_1 m}, \ldots, f_r\chi^{s_r m}$ sont des éléments homogènes de degré $s_1, \ldots, s_r > 0$ de l'algèbre graduée A_L (par rapport à la variable χ^m) alors*

$$D = -\min_{1 \leq i \leq r} \frac{\operatorname{div} f_i}{s_i}.$$

Démonstration. (i) Supposons que $Q(A_L)_0 = \mathbf{k}$. Par le lemme 4.5.7, on a $A_L = \mathbf{k}[\beta\,\chi^{dm}]$, pour $\beta \in K_0^\star$ et $d \in \mathbb{Z}_{>0}$. Ainsi, nous pouvons prendre $D = \frac{\operatorname{div}\beta^{-1}}{d}$. L'unicité dans ce cas est facile. Cela donne l'assertion (i).

(ii) Le corps des fonctions rationnelles de la variété normale $\operatorname{Proj} A_L$ est $K_0 = Q(A_L)_0$. Puisque $\operatorname{Proj} A_L$ est une courbe projective régulière (car normale) sur $A_0 = \mathbf{k}$, nous pouvons l'identifier avec la surface de Riemann des places de K_0. Par conséquent, l'existence et l'unicité de D suivent du théorème de Demazure (voir [De 2, théorème 3.5]). De plus, $Q(A_L)_0 \neq \mathbf{k}$ implique que $\dim_{\mathbf{k}} A_{sm} \geq 2$, pour un entier $s \in \mathbb{Z}_{>0}$. D'où par [St, 1.4.12], nous obtenons $\deg D > 0$.

La démonstration de l'assertion (iii) suit de 4.5.8 et de [FZ, 3.9]. □

Comme conséquence du corollaire 4.5.9, nous pouvons à nouveau appliquer la formule de géométrie convexe de 4.4.11 pour obtenir l'existence du diviseur polyédral $\mathfrak{D}$ dans l'énoncé 4.5.6 (i).

Démonstration de 4.5.6 (i). Gardons les mêmes notations que dans 4.4.3 et 4.4.10. Soit

$$f = (f_1\chi^{m_1}, \ldots, f_r\chi^{m_r})$$

un système de générateurs homogènes de A avec $f_i \in K_0^\star$. Considérons un cône

$$L = \mathbb{Q}_{\geq 0} \cdot m \subset \sigma^\vee$$

de dimension 1 avec vecteur primitif $m \in M$. Par le corollaire 4.5.9, nous avons

$$A_L = \bigoplus_{s \geq 0} H^0(C, \mathcal{O}_C(\lfloor sD_m \rfloor))\chi^{sm},$$

pour un unique diviseur de Weil rationnel D_m sur C. Par l'argument de démonstration de [AH, Lemma 4.1], l'algèbre A_L est engendrée par

$$\prod_{i=1}^{r} (f_i\chi^{m_i})^{s_i} \text{ avec } (s_1, \ldots s_r) \in \mathscr{H}_L^\star.$$

Par le corollaire 4.5.9 (iii) et le lemme 4.4.11, nous avons $\mathfrak{D}[f](m) = D_m$ et donc $A = A[C, \mathfrak{D}[f]]$.

Il reste à montrer que $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}[f]$ est propre ; l'unicité de $\mathfrak{D}$ sera donnée par le lemme 4.5.8 (ii). Désignons par $S \subset C$ l'union des supports des diviseurs $\operatorname{div} f_i$, pour $i = 1, \ldots, r$. Soit $v \in \deg \mathfrak{D}$. Nous pouvons écrire

$$v = \sum_{z \in S} [\kappa(P_z) : \mathbf{k}] \cdot v_z,$$

pour $v_z \in \Delta_z[f]$. Par conséquent, pour chaque $i = 1, \ldots, r$, on a

$$\langle m_i, \sum_{z \in S} [\kappa(P_z) : \mathbf{k}] \cdot v_z \rangle \geq -\sum_{s \in S} [\kappa(P_z) : \mathbf{k}] \cdot \mathrm{ord}_z f_i = -\deg \operatorname{div} f_i = 0$$

et donc $\deg \mathfrak{D} \subset \sigma$. Si $\deg \mathfrak{D} = \sigma$ alors on conclut que $\operatorname{Frac} A \neq \operatorname{Frac} K_0[M]$, contredisant notre hypothèse. D'où $\deg \mathfrak{D} \neq \sigma$. Soit $m \in \sigma_M^\vee$ tel que $\deg \mathfrak{D}(m) = 0$. Alors m appartient au bord de $\sigma^\vee$. Considérons le cône L de dimension 1 engendré par m. En appliquant le corollaire 4.5.9 (i) pour l'algèbre A_L, nous déduisons qu'un multiple entier non nul de $\mathfrak{D}(m)$ est un diviseur principal. Cela montre que $\mathfrak{D}$ est propre. □

Démonstration de 4.5.6 (ii). Montrons que $A = A[C, \mathfrak{D}]$ et $K_0[M]$ ont le même corps des fractions. Soit $L = \mathbb{Q}_{\geq 0} \cdot m$ un cône de dimension 1 intersectant $\sigma^\vee$ avec son intérieur relatif et ayant m comme vecteur primitif. Puisque $\deg \mathfrak{D}(m) > 0$, par le lemme 4.5.8 (i), $\operatorname{Frac} A_L = K_0(\chi^m)$. Comme conséquence, $\sigma^\vee$ est le cône des poids de l'algèbre M-graduée A. La démonstration de la normalité de A est analogue à celle de 4.4.4 (i).

Montrons que A est de type fini sur $\mathbf{k}$. Désignons par $\operatorname{relint} \sigma^\vee$ l'intérieur relatif du cône $\sigma^\vee$. Tout d'abord, nous pouvons considérer une subdivision de $\sigma^\vee$ par des cônes polyédraux réguliers $\omega_1, \ldots, \omega_s$ tels que pour tout $i = 1, \ldots, s$, on a $\omega_i \cap \operatorname{relint} \sigma^\vee \neq \emptyset$, ω_i est de pleine dimension, et $\mathfrak{D}$ est linéaire sur ω_i. Fixons $1 \leq i \leq s$ et un entier $k \in \mathbb{Z}_{>0}$. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base du réseau M engendrant le cône ω_i et telle que $e_1 \in \operatorname{relint} \sigma^\vee$. Par propreté de $\mathfrak{D}$, il existe $d \in \mathbb{Z}_{>0}$ tel que chaque $\mathfrak{D}(de_j)$ est un diviseur de Weil entier donnant un faisceau inversible globalement engendré. En posant

$$A_{\omega_i,k} = \bigoplus_{(a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{Z}^n} H^0\left(C, \mathcal{O}\left(\left\lfloor \sum_{i=1}^n a_i k e_i \right\rfloor\right)\right) \chi^{\sum_i a_i k e_i},$$

nous considérons $f_1\chi^{m_1}, \ldots, f_r\chi^{m_r} \in A_{\omega_i,d}$ obtenus par un ensemble fini de générateurs de l'espace vectoriel des sections globales de chaque $\mathcal{O}(\mathfrak{D}(de_j))$, et un ensemble fini de générateurs homogènes de l'algèbre graduée

$$B = \bigoplus_{l \geq 0} H^0(C, \mathcal{O}_C(\mathfrak{D}(dle_1)))\chi^{lde_1},$$

voir le lemme 4.5.8 (i). En utilisant 4.5.6 (iii), la normalisation de $\mathbf{k}[f_1\chi^{m_1}, \ldots, f_r\chi^{m_r}]$ est $A_{\omega_i,d}$. Donc par le théorème 2 dans [Bou, V3.2], l'algèbre $A_{\omega_i} = A_{\omega_i,1}$ est de type fini sur $\mathbf{k}$. On conclut en utilisant la surjection $A_{\omega_1} \otimes \ldots \otimes A_{\omega_s} \to A$. □

Dans la prochaine assertion, nous étudions comment l'algèbre associée à un diviseur polyédral sur une courbe projective régulière change lorsque nous étendons les scalaires à une clôture algébrique du corps de base. Les assertions (i), (ii) proviennent de faits classiques de la théorie des corps de fonctions algébriques d'une variable. Les démonstrations sont donc omises. Rappelons qu'un corps est dit *parfait* si toutes ses extensions algébriques sont séparables.

Proposition 4.5.10. *Supposons que le corps* $\mathbf{k}$ *est parfait et soit* $\bar{\mathbf{k}}$ *une clôture algébrique de* $\mathbf{k}$. *Désignons par* $\mathfrak{S}_{\bar{\mathbf{k}}/\mathbf{k}}$ *le groupe de Galois absolu de* $\mathbf{k}$. *Pour une courbe projective régulière* C *sur* $\mathbf{k}$ *associée à un corps de fonctions algébriques* $K_0/\mathbf{k}$, *les assertions suivantes sont vraies.*

(i) $\bar{K}_0 = \bar{\mathbf{k}} \otimes_{\mathbf{k}} K_0$ *est un corps de fonctions algébriques sur* $\bar{\mathbf{k}}$ *dont sa surface de Riemann s'identifie à la courbe* $C_{\bar{\mathbf{k}}} = C \times_{\operatorname{Spec} \mathbf{k}} \operatorname{Spec} \bar{\mathbf{k}}$.

(ii) *Le groupe* $\mathfrak{S}_{\bar{\mathbf{k}}/\mathbf{k}}$ *opère naturellement dans* $C_{\bar{\mathbf{k}}}$ *et dans l'ensemble des places de* $C_{\bar{\mathbf{k}}}$. *Toute orbite sous l'opération de* $\mathfrak{S}_{\bar{\mathbf{k}}/\mathbf{k}}$ *dans l'ensemble des places de* $C_{\bar{\mathbf{k}}}$ *est un ensemble fini qui est une fibre de l'application surjective*

$$S : \mathscr{R}_{\bar{\mathbf{k}}}\bar{K}_0 \to C = \mathscr{R}_{\mathbf{k}}K_0, \quad P \to P \cap K_0,$$

et toute fibre de S *est décrite ainsi.*

(iii) *Si* $\mathfrak{D} = \sum_{z\in C} \Delta_z \cdot z$ *est un diviseur* σ*-polyédral propre sur* C *alors*

$$A[C, \mathfrak{D}] \otimes_{\mathbf{k}} \bar{\mathbf{k}} = A[C_{\bar{\mathbf{k}}}, \mathfrak{D}_{\bar{\mathbf{k}}}],$$

où $\mathfrak{D}_{\bar{\mathbf{k}}}$ *est le diviseur* σ*-polyédral propre sur* $C_{\bar{\mathbf{k}}}$ *défini par*

$$\mathfrak{D}_{\bar{\mathbf{k}}} = \sum_{z\in C} \Delta_z \cdot S^{\star}(z) \text{ avec } S^{\star}(z) = \sum_{z'\in S^{-1}(z)} z'.$$

Démonstration. (iii) Étant donné un diviseur de Weil rationnel D sur C, par [St, Theorem 3.6.3,], il vient

$$H^0(C, \mathcal{O}_C(\lfloor D \rfloor)) \otimes_{\mathbf{k}} \bar{\mathbf{k}} = H^0(C_{\bar{\mathbf{k}}}, \mathcal{O}_{C_{\bar{\mathbf{k}}}}(\lfloor S^{\star} D \rfloor)).$$

La démonstration de (iii) suit du calcul de $A[C, \mathfrak{D}] \otimes_{\mathbf{k}} \bar{\mathbf{k}}$. La propreté de $\mathfrak{D}_{\bar{\mathbf{k}}}$ est donnée par 4.5.6 (i). $\square$

L'énoncé ci-dessus ne se généralise pas dans le cas imparfait, comme expliqué dans la remarque suivante.

Remarque 4.5.11. Il est bien connu que toute extension de corps de type fini sur un corps parfait est séparable. Cependant, dans le cas imparfait, nous pouvons considérer le corps de fonctions algébriques

$$K_0 = \operatorname{Frac} \frac{\mathbf{k}[X, Y]}{(tX^2 + s + Y^2)},$$

qui est inséparable sur $\mathbf{k} = \mathbb{F}_2(s, t)$, où s, t sont deux variables indépendantes sur $\mathbb{F}_2$. Si on fixe une clôture algébrique $\bar{\mathbf{k}}$ de $\mathbf{k}$, alors pour tout diviseur polyédral propre $\mathfrak{D}$ sur $C = \mathscr{R}_{\mathbf{k}} K_0$, l'anneau $B = A[C, \mathfrak{D}] \otimes_{\mathbf{k}} \bar{\mathbf{k}}$ contient au moins un élément nilpotent non nul.

4.6 Description des $\mathbb{T}$-variétés affines de complexité un dans le cas où $\mathbb{T}$ est déployé

Comme application des résultats de la section précédente, nous pouvons donner maintenant une description des $\mathbb{T}$-variétés affines de complexité 1 sur un corps $\mathbf{k}$, où $\mathbb{T}$ est un tore algébrique déployé. Dans le paragraphe suivant, nous rappelons quelques faits élémentaires sur les opérations de tores algébriques.

4.6.1. Soit $\mathbb{T}$ un tore algébrique déployé sur $\mathbf{k}$. Désignons par M et N ses réseaux duaux des caractères et des sous-groupes à 1 paramètre. Soit $X = \operatorname{Spec} A$ une variété affine sur $\mathbf{k}$. Supposons que $\mathbb{T}$ opère dans X. Alors le comorphisme $A \to A \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[\mathbb{T}]$ donne une M-graduation sur A. Nous disons que X est une $\mathbb{T}$-*variété* si X est normale et si l'opération de $\mathbb{T}$ dans X est fidèle [5]. Cela est équivalent à dire que l'algèbre A est M-graduée normale et que l'ensemble de ses poids engendre le réseau M.

Définition 4.6.2. Soient C une courbe algébrique régulière sur $\mathbf{k}$ et $\sigma \subset N_{\mathbb{Q}}$ un cône polyédral saillant. Un diviseur σ-polyédral $\mathfrak{D} = \sum_{z \in C} \Delta_z \cdot z$ est dit *propre* s'il satisfait au moins un des énoncés suivants.

(i) C est affine. En particulier, $\mathfrak{D}$ est un diviseur polyédral sur l'anneau de Dedekind $A_0 = \mathbf{k}[C]$.

(ii) C est projective et $\mathfrak{D}$ est un diviseur polyédral propre au sens de 4.5.5.

Nous désignons par $A[C, \mathfrak{D}]$ l'algèbre M-graduée associée.

5. Voyant $\mathbb{T}$ comme un foncteur en groupes représentable, cela veut dire que la transformation naturelle de foncteurs en groupes $\mathbb{T} \to \operatorname{Aut} X$ a son noyau trivial.

En combinant les résultats 4.4.4 et 4.5.6, on peut décrire une $\mathbb{T}$-variété affine déployée de complexité 1 par un diviseur polyédral propre.

Théorème 4.6.3. *Soit $\mathbb{T}$ un tore algébrique déployé sur $\mathbf{k}$ avec réseau des caractères M.*

(i) *Pour chaque $\mathbb{T}$-variété $X = \operatorname{Spec} A$ sur $\mathbf{k}$ de complexité un, il existe un diviseur σ-polyédral propre $\mathfrak{D}$ sur une courbe régulière C sur $\mathbf{k}$ tel que $A \simeq A[C, \mathfrak{D}]$ en tant qu'algèbres M-graduées.*

(ii) *Réciproquement, si $\mathfrak{D}$ est un diviseur σ-polyédral propre sur une courbe régulière C alors $X = \operatorname{Spec} A$, avec $A = A[C, \mathfrak{D}]$, définit une $\mathbb{T}$-variété affine de complexité un.*

Démonstration. (i) Considérons le sous-corps $Q(A)_0 \subset \mathbf{k}(X)$ engendré par les quotients a/b, où $a, b \in A$ sont des éléments homogènes de même degré. Soit $\sigma \subset N_{\mathbb{Q}}$ le dual du cône des poids de A. Remarquons que nous pouvons choisir des vecteurs de poids $\chi^m \in \operatorname{Frac} A$ tels que pour tous $m, m' \in M$, $\chi^m \cdot \chi^{m'} = \chi^{m+m'}$ et $\chi^0 = 1$, et donnant lieu à une inclusion

$$A \subset \bigoplus_{m \in M} Q(A)_0 \, \chi^m = Q(A)_0[M],$$

où A est un sous-anneau M-gradué. Les anneaux A et $Q(A)_0[M]$ ont même corps des fractions. Supposons que $A_0 \neq \mathbf{k}$. Posons $K_0 = \operatorname{Frac} A_0$. Alors par normalité de A, $K_0 = Q(A)_0$. De plus, A_0 est un anneau de Dedekind, par le théorème 4.4.4 (ii), nous obtenons $A = A[C, \mathfrak{D}]$, pour un diviseur σ-polyédral $\mathfrak{D}$ sur A_0. Si $A_0 = \mathbf{k}$ alors on conclut par le théorème 4.5.6 (i). L'assertion (ii) suit immédiatement de 4.4.4 (i) et 4.5.6 (ii). $\square$

4.7 Opérations de tores algébriques de complexité un et diviseurs polyédraux Galois stables

En vue des résultats de la section précédente, nous donnons une description combinatoire des variétés normales affines munies d'une opération d'un tore algébrique (possiblement non déployé) de complexité 1. Cela peut être mis en parallèle avec des descriptions bien connues concernant les variétés toriques et les plongements sphériques d'espaces homogènes ; voir [Bry, CTHS, Vos, ELST, Hu].

4.7.1. Pour une extension de corps $F/\mathbf{k}$ et un schéma X sur $\mathbf{k}$, nous posons

$$X_F = X \times_{\operatorname{Spec}\mathbf{k}} \operatorname{Spec} F.$$

C'est un schéma sur F. Un *tore algébrique* de dimension n est un groupe algébrique $\mathbf{G}$ sur $\mathbf{k}$ (i.e. un schéma en groupes lisse et de type fini) tel qu'il existe une extension galoisienne finie $E/\mathbf{k}$ donnant un isomorphisme de groupes algébriques $\mathbf{G}_E \simeq \mathbb{G}_{m,E}^n$ où $\mathbb{G}_m$ est le schéma en groupes multiplicatif sur $\mathbf{k}$. Nous disons que le tore $\mathbf{G}$ *se déploie (ou se décompose) dans l'extension* $E/\mathbf{k}$. Pour plus de détails sur les groupes algébriques réductifs non déployés voir [BoTi, Sp].

Dans toute cette section, $\mathbf{G}$ est un tore sur $\mathbf{k}$ qui se déploie dans une extension galoisienne finie $E/\mathbf{k}$. Désignons par $\mathfrak{S}_{E/\mathbf{k}}$ le groupe de Galois de l'extension $E/\mathbf{k}$. Considérons à nouveau les réseaux duaux M et N, des caractères et des sous-groupes à 1 paramètre, du tore déployé $\mathbf{G}_E$. Notons que dans la suite la plupart des variétés que nous étudions sont sur le corps E. Nous commençons par préciser une notion classique.

Définition 4.7.2.

(i) Une opération de $\mathfrak{S}_{E/\mathbf{k}}$ dans une variété V sur E est dite *semi-linéaire* si $\mathfrak{S}_{E/\mathbf{k}}$ opère par automorphismes de schémas et si pour tout $g \in \mathfrak{S}_{E/\mathbf{k}}$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "g"] \arrow[d] & V \arrow[d] \\ \operatorname{Spec} E \arrow[r, "g"'] & \operatorname{Spec} E \end{tikzcd}$$

est commutatif.

(ii) Soit B une algèbre sur E. Une opération *semi-linéaire* de $\mathfrak{S}_{E/\mathbf{k}}$ dans B est une opération par automorphismes d'anneaux telle que pour tous $a \in B$, $\lambda \in E$, et $g \in \mathfrak{S}_{E/\mathbf{k}}$,

$$g \cdot (\lambda a) = g(\lambda) g \cdot a.$$

En particulier, $g \cdot (\lambda a) = \lambda g \cdot a$ si $\lambda \in \mathbf{k}$.

Si V est affine alors avoir une opération semi-linéaire de $\mathfrak{S}_{E/\mathbf{k}}$ dans V est équivalent à avoir une opération semi-linéaire du même groupe dans l'algèbre $E[V]$.

Ensuite, nous rappelons une description bien connue des tores algébriques par le biais des opérations de groupes finis dans les réseaux.

4.7.3. Le groupe de Galois $\mathfrak{S}_{E/\mathbf{k}}$ opère naturellement dans le tore

$$\mathbf{G}_E = \mathbf{G} \times_{\operatorname{Spec}\mathbf{k}} \operatorname{Spec} E$$

par le second facteur. L'opération correspondante dans $E[M]$ est déterminée par une opération linéaire de $\mathfrak{S}_{E/\mathbf{k}}$ dans M (voir [ELST, Proposition 2.5], [Vos, Section 1]).

Réciproquement, étant donnée une opération $\mathbb{Z}$-linéaire de $\mathfrak{S}_{E/\mathbf{k}}$ dans le réseau M, nous avons une opération semi-linéaire dans $E[M]$ définie par

$$g \cdot (\lambda\chi^m) = g(\lambda)\chi^{g\cdot m},$$

où $g \in \mathfrak{S}_{E/\mathbf{k}}$, $\lambda \in E$ et $m \in M$. Cette opération respecte la structure d'algèbre de Hopf de $E[M]$. Comme conséquence du lemme de Speiser, nous obtenons un tore $\mathbf{G}$ sur $\mathbf{k}$ qui se déploie dans $E/\mathbf{k}$. De plus, l'opération semi-linéaire construite dans $\mathbf{G}_E = \mathbf{G} \times_{\operatorname{Spec}\mathbf{k}} \operatorname{Spec} E$ est exactement l'opération naturelle initiale sur le second facteur.

La définition suivante introduit la catégorie des $\mathbf{G}$-variétés.

Définition 4.7.4. Une $\mathbf{G}$-*variété de complexité* d est une variété normale sur $\mathbf{k}$ avec une opération de $\mathbf{G}$ telle que X_E est une $\mathbf{G}_E$-variété de complexité d (au sens de la section précédente). Un $\mathbf{G}$-*morphisme* entre deux $\mathbf{G}$-variétés X et Y sur $\mathbf{k}$ est un morphisme $f : X \to Y$ de variétés sur $\mathbf{k}$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathbf{G} \times X \arrow[r, "\mathrm{id}\times f"] \arrow[d] & \mathbf{G} \times Y \arrow[d] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Une classe importante d'opérations semi-linéaires sont celles qui respectent l'opération d'un tore algébrique déployé. Nous fixons une opération de $\mathfrak{S}_{E/\mathbf{k}}$ dans $\mathbf{G}_E$ donnée comme dans le paragraphe 4.7.3.

Définition 4.7.5.

(i) Soit B une algèbre M-graduée sur E. Une opération semi-linéaire de $\mathfrak{S}_{E/\mathbf{k}}$ dans B est dite *homogène* si elle envoie les éléments homogènes sur les éléments homogènes.

(ii) Une opération semi-linéaire de $\mathfrak{S}_{E/\mathbf{k}}$ dans une $\mathbf{G}_E$-variété V *respecte l'opération de* $\mathbf{G}_E$ si pour tout $g \in \mathfrak{S}_{E/\mathbf{k}}$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathbf{G}_E \times V \arrow[r, "g\times g"] \arrow[d] & \mathbf{G}_E \times V \arrow[d] \\ V \arrow[r, "g"'] & V \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Sous l'hypothèse que V est affine, une opération semi-linéaire de $\mathfrak{S}_{E/\mathbf{k}}$, respectant l'opération du tore $\mathbf{G}_E$, correspond exactement à une opération semi-linéaire homogène de $\mathfrak{S}_{E/\mathbf{k}}$ dans l'algèbre $E[V]$.

Le résultat suivant est classiquement énoncé pour la catégorie des variétés quasi-projectives, voir par exemple la démonstration de [Hu 2, 1.10]. Dans le contexte des $\mathbf{G}$-variétés affines, nous donnons un court argument.

Lemme 4.7.6. *Soit V une $\mathbf{G}_E$-variété de complexité d sur le corps E munie d'une opération semi-linéaire de $\mathfrak{S}_{E/\mathbf{k}}$ compatible avec l'opération de $\mathbf{G}_E$. Alors le quotient $X = V/\mathfrak{S}_{E/\mathbf{k}}$ est une $\mathbf{G}$- variété affine de complexité d. En faisant agir $\mathfrak{S}_{E/\mathbf{k}}$ dans $X_E = X \times_{\operatorname{Spec}\mathbf{k}} \operatorname{Spec} E$ par le second facteur, nous avons un isomorphisme de $\mathbf{G}_E$-variétés $X_E \simeq V$ respectant les opérations de $\mathfrak{S}_{E/\mathbf{k}}$.*

Démonstration. Il est connu que l'algèbre $R = B^{\mathfrak{S}_{E/\mathbf{k}}}$ est de type fini sur $\mathbf{k}$. Montrons que R est normale. En considérant L le corps des fractions de R et $f \in L$ un élément entier sur R, par normalité de B, nous avons $f \in B \cap L = R$. Cela montre la normalité de R. En utilisant la définition précédente, la variété X est munie d'une opération de $\mathbf{G}$. Le reste de la démonstration suit du lemme de Speiser. □

Fixant une $\mathbf{G}$-variété affine X de complexité d sur E, une $E/\mathbf{k}$-*forme* de X est une $\mathbf{G}$-variété affine Y sur $\mathbf{k}$ telle que nous avons un $\mathbf{G}_E$-isomorphisme $X_E \simeq Y_E$. Notre but est de donner une description combinatoire de l'ensemble des $E/\mathbf{k}$-formes d'une $\mathbf{G}$-variété affine donnée X. Rappelons dans ce contexte quelque notion de cohomologie galoisienne non abélienne (voir par exemple [Ser, III Section 1] pour la descente galoisienne des variétés algébriques).

4.7.7. Soient Y, Y' des $E/\mathbf{k}$-formes d'une $\mathbf{G}$-variété affine fixée X. Le groupe de Galois $\mathfrak{S}_{E/\mathbf{k}}$ opère dans l'ensemble des $\mathbf{G}_E$-isomorphismes entre Y_E et Y'_E. Par conséquent, il opère aussi par automorphismes de groupes dans le groupe des $\mathbf{G}_E$-automorphismes

$\mathrm{Aut}_{\mathbf{G}_E}(X_E)$ de X_E. Plus précisément, rappelons que pour tout $g \in \mathfrak{S}_{E/\mathbf{k}}$ et tout $\mathbf{G}_E$-isomorphisme $\varphi : Y_E \to Y'_E$, on définit $g(\varphi)$ par le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} Y_E \arrow[r, "g(\varphi)"] \arrow[d, "g"'] & Y'_E \arrow[d, "g"] \\ Y_E \arrow[r, "\varphi"'] & Y'_E \end{tikzcd} .$$

Notons que cette opération de $\mathfrak{S}_{E/\mathbf{k}}$ dépend de la donnée des $E/\mathbf{k}$-formes Y, Y'. Maintenant, étant donné un $\mathbf{G}_E$-isomorphisme $\psi : X_E \to Y_E$ l'application

$$a : \mathfrak{S}_{E/\mathbf{k}} \to \mathrm{Aut}_{\mathbf{G}_E}(X_E), \quad g \mapsto a_g = \psi^{-1} \circ g(\psi)$$

est un 1-*cocycle.* Cela signifie que pour tous $g, g' \in \mathfrak{S}_{E/\mathbf{k}}$, nous avons

$$a_g \circ g(a_{g'}) = \psi^{-1} \circ g(\psi) \circ g\left(\psi^{-1} \circ g'(\psi)\right) = a_{gg'}.$$

Soit $\phi : Y \to Y'$ un $\mathbf{G}$-isomorphisme et prenons un $\mathbf{G}_E$-isomorphisme $\varphi : X_E \to Y'_E$ donnant un 1-cocycle b comme avant. Le diagramme

$$\begin{tikzcd} X_E \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\alpha"'] & Y_E \arrow[d, "\phi' = \phi \times \mathrm{id}"] \\ X_E \arrow[r, "\varphi"'] & Y'_E \end{tikzcd}$$

est commutatif, où $\alpha \in \mathrm{Aut}_{\mathbf{G}_E}(X_E)$ et ϕ' est l'extension naturelle de ϕ. Puisque pour tout $g \in \mathfrak{S}_{E/\mathbf{k}}$, $g(\phi') = \phi'$, il s'ensuit que

$$b_g = \alpha \circ a_g \circ g\left(\alpha^{-1}\right).$$

Dans ce cas, nous disons que les cocycles a et b sont *cohomologues.* Nous obtenons ainsi une application Φ entre l'ensemble pointé des classes d'isomorphisme de $E/\mathbf{k}$-formes de X et l'ensemble pointé

$$H^1(E/\mathbf{k}, \mathrm{Aut}_{\mathbf{G}_E}(X_E))$$

des classes de cohomologie de 1-cocycles $a : \mathfrak{S}_{E/\mathbf{k}} \to \mathrm{Aut}_{\mathbf{G}_E}(X_E)$.

Réciproquement, partant d'un cocycle a, l'application

$$\mathfrak{S}_{E/\mathbf{k}} \to \mathrm{Aut}_{\mathbf{G}_E}(X_E), \quad g \mapsto a_g \circ g$$

est une opération semi-linéaire dans X_E respectant l'opération de $\mathbf{G}_E$. D'après le lemme 5.6, on peut associer une $E/\mathbf{k}$-forme W de X en prenant le quotient $X_E/\mathfrak{S}_{E/\mathbf{k}}$. En remplaçant a par un autre cocycle qui lui est cohomologue, on obtient par ce dernier procédé une $E/\mathbf{k}$-forme de X isomorphe à W. Ainsi, nous déduisons que l'application Φ est bijective.

En outre, soit γ une opération semi-linéaire de $\mathfrak{S}_{E/\mathbf{k}}$ dans X_E. Remarquons que pour tous $g, g' \in \mathfrak{S}_{E/\mathbf{k}}$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} X_E \arrow[r, "\gamma(g')"] \arrow[d, "g^{-1}"'] & X_E \arrow[d, "g^{-1}"] \\ X_E \arrow[r, "g(\gamma(g'))"'] & X_E \end{tikzcd}$$

est commutatif. D'où l'égalité $a_g = \gamma(g) \circ g^{-1}$ définit un 1-cocycle a. Une vérification directe montre que $H^1(E/\mathbf{k}, \mathrm{Aut}_{\mathbf{G}_E}(X_E))$ est aussi en bijection avec l'ensemble pointé des classes de conjugaison des opérations semi-linéaires de $\mathfrak{S}_{E/\mathbf{k}}$ dans X_E compatibles avec l'opération de $\mathbf{G}_E$.

Comme expliqué dans le paragraphe précédent, déterminer l'ensemble pointé des $E/\mathbf{k}$-formes de X est équivalent à décrire toutes les opérations semi-linéaires compatibles possibles de $\mathfrak{S}_{E/\mathbf{k}}$ dans X_E. Ainsi, généralisant la notion de diviseurs polyédraux, nous considérons la contre-partie combinatoire de cette classification.

Définition 4.7.8. Soient C une courbe régulière sur E et $\sigma \subset N_{\mathbb{Q}}$ un cône polyédral saillant.

(a) Un *diviseur σ-polyédral principal* $\mathfrak{F}$ sur C est un couple $(\varphi, \mathfrak{D})$ où $\varphi : \sigma_M^\vee \to \mathbf{k}(C)^\star$ est un morphisme de monoïdes et $\mathfrak{D}$ est un diviseur σ-polyédral sur C tel que pour tout $m \in \sigma_M^\vee$,

$$\mathfrak{D}(m) = \mathrm{div}_C\, \varphi(m).$$

Habituellement nous écrivons $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{D}$ par la même lettre.

(b) Un *diviseur σ-polyédral $\mathfrak{S}_{E/\mathbf{k}}$-stable* sur C est la donnée de $(\mathfrak{D}, \mathfrak{F}, \star, \cdot)$ vérifiant les conditions suivantes.

(i) $\mathfrak{D}$ (resp. $\mathfrak{F}$) est un diviseur σ-polyédral propre (resp. principal) sur la courbe C.

(ii) La courbe C est munie d'une opération semi-linéaire de $\mathfrak{S}_{E/\mathbf{k}}$,

$$\mathfrak{S}_{E/\mathbf{k}} \times C \to C, \;\; (g, z) \mapsto g \star z.$$

Cela donne naturellement une opération linéaire dans l'espace vectoriel des diviseurs de Weil rationnels sur C. Plus précisément, étant donnés $g \in \mathfrak{S}_{E/\mathbf{k}}$ et un diviseur de Weil rationnel D sur C, nous posons

$$g \star D = \sum_{z \in C} a_{g^{-1} \star z} \cdot z, \text{ avec } D = \sum_{z \in C} a_z \cdot z.$$

(iii) Le réseau M est munie d'une opération $\mathbb{Z}$-linéaire de $\mathfrak{S}_{E/\mathbf{k}}$,

$$\mathfrak{S}_{E/\mathbf{k}} \times M \to M, \ (g, m) \mapsto g \cdot m$$

préservant le sous-ensemble $\sigma_M^\vee$.

La liste $(\mathfrak{D}, \mathfrak{F}, \star, \cdot)$ satisfait l'égalité

$$g \star (\mathfrak{D}(m) + \mathfrak{F}(m)) = \mathfrak{D}(g \cdot m) + \mathfrak{F}(g \cdot m),$$

où $m \in \sigma_M^\vee$ et $g \in \mathfrak{S}_{E/\mathbf{k}}$.

Le résultat suivant est une conséquence directe du théorème 90 de Hilbert. Nous incluons ici un courte démonstration.

Lemme 4.7.9. *Soit E_0/K_0 une extension galoisienne finie de groupe de Galois $\mathfrak{S}_{E_0/K_0}$. Supposons que $\mathfrak{S}_{E_0/K_0}$ opère linéairement dans le réseau M. Pour tout $g \in \mathfrak{S}_{E_0/K_0}$, considérons un morphisme de groupes $f_g : M \to E_0^\star$ satisfaisant les égalités*

$$f_{gh}(m) = g\,(f_h(m))\, f_g(h \cdot m),$$

où $g, h \in \mathfrak{S}_{E_0/K_0}$ et $m \in M$. Alors il existe un morphisme de groupes $b : M \to E_0^\star$ tel que pour tous $g \in \mathfrak{S}_{E_0/K_0}$, $m \in M$,

$$f_g(m) = b(g \cdot m) g(b(m))^{-1}.$$

Démonstration. Le groupe opposé de $\mathfrak{S}_{E_0/K_0}$ est le groupe H avec sa structure d'ensemble $\mathfrak{S}_{E_0/K_0}$ et dont la loi de composition interne est définie par $g \star h = hg$, où $g, h \in H$. Pour $g \in H$, nous désignons par $a_g : M \to E_0^\star$ le morphisme de groupes où pour tout $m \in M$, on a

$$a_g(m) = g^{-1}(f_g(m)).$$

Nous pouvons aussi définir une opération de H par automorphisme de groupes dans le groupe abélien

$$T = \mathrm{Hom}(M, E_0^\star)$$

sur E_0 en posant $(g \cdot \alpha)(m) = g^{-1}(\alpha(g \cdot m))$, où $\alpha \in T$, $g \in H$, et $m \in M$. En considérant $g, h \in H$, nous obtenons

$$a_{h\star g}(m) = (gh)^{-1}(f_{gh}(m)) = (gh)^{-1}(g(f_h(m))f_g(h \cdot m)) = a_h(m)(h \cdot a_g)(m)$$

de sorte que l'application $g \mapsto a_g$ est un 1-cocycle. Par le théorème 90 de Hilbert, on a un isomorphisme de groupes abéliens

$$H^1(H, T) \simeq H^1(E_0/K_0, T) = 1.$$

Donc il existe $b \in T$ tel que pour tout $g \in H$, $a_g = b \cdot (g \cdot b^{-1})$. Ces dernières égalités donnent le résultat. $\square$

Le prochain théorème donne une classification des $\mathbf{G}$-variétés affines de complexité 1 en termes de diviseurs polyédraux stables par Galois.

Théorème 4.7.10. *Soit $\mathbf{G}$ un tore sur $\mathbf{k}$ se déployant dans une extension galoisienne finie $E/\mathbf{k}$. Désignons par $\mathfrak{S}_{E/\mathbf{k}}$ le groupe de Galois de l'extension $E/\mathbf{k}$. Alors les assertions suivantes sont vraies.*

(i) *Toute $\mathbf{G}$-variété affine de complexité 1 se déployant dans $E/\mathbf{k}$ est décrite par un diviseur polyédral $\mathfrak{S}_{E/\mathbf{k}}$-stable sur une courbe régulière au dessus du corps E.*

(ii) *Réciproquement, soit C une courbe régulière sur E. Pour un diviseur polyédral $\mathfrak{S}_{E/\mathbf{k}}$-stable $(\mathfrak{D}, \mathfrak{F}, \star, \cdot)$ sur C on peut munir l'algèbre $A[C, \mathfrak{D}]$ d'une opération semi-linéaire homogène de $\mathfrak{S}_{E/\mathbf{k}}$ et associer une $\mathbf{G}$-variété de complexité 1 sur $\mathbf{k}$ se déployant dans $E/\mathbf{k}$ en prenant $X = \operatorname{Spec} A$, où*

$$A = A[C, \mathfrak{D}]^{\mathfrak{S}_{E/\mathbf{k}}}.$$

Démonstration. (i) Soit X une $\mathbf{G}$-variété affine de complexité 1 sur $\mathbf{k}$. Par le théorème 4.6.3, nous pouvons supposer que $B = A[C, \mathfrak{D}]$ est l'anneau des coordonnées de X_E pour un diviseur σ-polyédral propre $\mathfrak{D}$ sur une courbe régulière C. L'algèbre B est munie d'une opération semi-linéaire homogène de $\mathfrak{S}_{E/\mathbf{k}}$. Posons $E_0 = E(C)$. En étendant l'opération sur $E_0[M]$, nous remarquons que E_0 et $E[C]$ sont des parties stables. Nous obtenons ainsi une opération semi-linéaire de $\mathfrak{S}_{E/\mathbf{k}}$ dans C. Précisons que si C est projective alors on peut définir l'opération de $\mathfrak{S}_{E/\mathbf{k}}$ dans C de la manière suivante : étant donnée une place $P \subset E_0$, nous posons

$$g \star P = \{g \star f \mid f \in P\}.$$

Dans le cas où C est arbitraire, le lemme de Speiser nous donne l'égalité

$$E_0 = E \cdot K_0 \ \text{ avec } \ K_0 = E_0^{\mathfrak{S}_{E/\mathbf{k}}}.$$

L'extension E_0/K_0 est galoisienne finie. Nous avons une identification naturelle $\mathfrak{S}_{E/\mathbf{k}} \simeq \mathfrak{S}_{E_0/K_0}$ avec le groupe de Galois de E_0/K_0. Pour tous $m \in M$, $g \in \mathfrak{S}_{E/\mathbf{k}}$, on a

$$g \cdot (f\chi^m) = g(f)f_g(m)\chi^{\Gamma(g,m)}, \tag{4.2}$$

pour un élément f_g du groupe abélien $T = \mathrm{Hom}(M, E_0^\star)$ et un vecteur $\Gamma(g, m) \in M$. On observe que Γ définit une opération linéaire de $\mathfrak{S}_{E/\mathbf{k}}$ dans M. Désignons alors par $g \cdot m$ le vecteur $\Gamma(g, m)$. Pour tous $g, h \in \mathfrak{S}_{E/\mathbf{k}}$, il vient

$$f_{gh}(m)\chi^m = gh \cdot \chi^m = g \cdot (h \cdot \chi^m) = g(f_h(m))f_g(h \cdot m)\chi^{gh \cdot m}.$$

En utilisant le lemme 4.7.9, on peut trouver $b \in T$ tel que pour tous $m \in M$, $g \in \mathfrak{S}_{E/\mathbf{k}}$, $f_g(m) = b(g \cdot m)/g(b(m))$. Considérons $\mathfrak{F}$ le diviseur σ-polyédral principal associé à b. Pour l'assertion (i), il reste à montrer l'égalité

$$g \star (\mathfrak{D}(m) + \mathfrak{F}(m)) = \mathfrak{D}(g \cdot m) + \mathfrak{F}(g \cdot m), \ \ \forall m \in \sigma_M^\vee, \forall g \in \mathfrak{S}_{E/\mathbf{k}}. \tag{4.3}$$

Tout d'abord, nous remarquons que si $f \in E_0^\star$ et $g \in \mathfrak{S}_{E/\mathbf{k}}$ alors $g \star \mathrm{div} f = \mathrm{div}\, g(f)$. Soit $f\chi^m \in B$ un élément homogène de degré m. La transformation de $f\chi^m$ par g est un élément de B de degré $g \cdot m$ et donc

$$\mathrm{div}\, g(f)f_g(m) + \mathfrak{D}(g \cdot m) \geq 0.$$

Cela implique que

$$g \star (-\mathrm{div} f + \mathfrak{F}(m)) \leq \mathfrak{F}(g \cdot m) + \mathfrak{D}(g \cdot m).$$

Par les corollaires 4.3.7 et 4.5.9 (iii), nous obtenons

$$g \star (\mathfrak{D}(m) + \mathfrak{F}(m)) \leq \mathfrak{D}(g \cdot m) + \mathfrak{F}(g \cdot m).$$

L'égalité opposée s'obtient par un argument analogue. On conclut que $(\mathfrak{D}, \mathfrak{F}, \star, \cdot)$ est un diviseur polyédral stable.

(ii) Si à nouveau $b \in T$ correspond à $\mathfrak{F}$ alors en vertu de (4.3), on peut définir une opération semi-linéaire homogène de $\mathfrak{S}_{E/\mathbf{k}}$ dans $A[C, \mathfrak{D}]$, en posant $f_g(m) = b(g \cdot m)/g(b(m))$ et par l'égalité (4.2). Le reste de la démonstration est une conséquence du lemme 4.7.6. □

Donnons un exemple élémentaire.

Exemple 4.7.11. Considérons le diviseur σ-polyédral $\mathfrak{D}$ sur la droite affine complexe $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[t]$ défini par

$$((1,0)+\sigma)\cdot\zeta + ((0,1)+\sigma)\cdot(-\zeta) + ((1,-1)+\sigma)\cdot 0,$$

où σ est le premier quadrant $\mathbb{Q}^2_{\geq 0}$ et $\zeta = \sqrt{-1}$. Nous munissons $\mathfrak{D}$ d'une structure de diviseur polyédral $\mathfrak{S}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}$-stable en considérant d'abord $\mathfrak{F}$ donné par le morphisme $(m_1, m_2) \mapsto t^{m_2 - m_1}$. Nous avons une opération linéaire de $\mathfrak{S}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}$,

$$\mathfrak{S}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}), \quad g \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dans le réseau $\mathbb{Z}^2$, où g représente le générateur du groupe $\mathfrak{S}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. L'algèbre des polynômes à une variable $\mathbb{C}[t]$ possède la conjugaison des nombres complexes $\star$. Un calcul direct donne

$$A = \mathbb{C}\left[t, \frac{1}{t(t-\zeta)}\chi^{(1,0)}, \frac{t}{t+\zeta}\chi^{(0,1)}\right]$$

et donc $X = \operatorname{Spec} A$ est isomorphe à l'espace affine complexe $\mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$. Plus concrètement, l'opération de $\mathfrak{S}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}$ dans l'algèbre A est obtenue par

$$g\cdot(f(t)\chi^{(m_1,m_2)}) = \bar{f}(t)t^{2(m_1-m_2)}\chi^{(m_2,m_1)}.$$

En posant $x = t^{-1}(1-\zeta)^{-1}\chi^{(1,0)}$ et $y = t(1+\zeta)^{-1}\chi^{(0,1)}$, nous observons que $A^{\mathfrak{S}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}} = \mathbb{R}[t, x+y, \zeta(x-y)]$. D'où : $X/\mathfrak{S}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}} \simeq \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$.

Dans la suite, nous décrivons l'ensemble pointé des classes d'isomorphisme des $E/\mathbf{k}$-formes d'une $\mathbf{G}$-variété affine de complexité 1 en termes de diviseurs polyédraux stables.

Définition 4.7.12. Les diviseurs σ-polyédraux stables $(\mathfrak{D}, \mathfrak{F}, \star, \cdot)$ et $(\mathfrak{D}, \mathfrak{F}', \star', \cdot')$ sur C sont *conjugués* s'ils vérifient les conditions suivantes. Il existe $\varphi \in \operatorname{Aut}(C)$, un diviseur σ-polyédral principal $\mathfrak{E}$ sur C, et un automorphisme linéaire $F \in \operatorname{Aut}(M)$ donnant un automorphisme de la E-algèbre $A[C, \mathfrak{D}]$ tels que pour tout $g \in \mathfrak{S}_{E/\mathbf{k}}$, les diagrammes

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "g\star"] \arrow[d, "\varphi"'] & C \arrow[d, "\varphi"] \\ C \arrow[r, "g\star'"'] & C \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} M \arrow[r, "g\cdot"] \arrow[d, "F"'] & M \arrow[d, "F"] \\ M \arrow[r, "g\cdot'"'] & M \end{tikzcd}$$

sont commutatifs, et pour tout $m \in M$,

$$\frac{\mathfrak{F}(g \cdot m)}{g \star \mathfrak{F}(m)} = \frac{g \star (\varphi^{-1})^{\star}\mathfrak{E}(m) \cdot (\varphi^{-1})^{\star}\mathfrak{F}'(F(g \cdot m))}{\mathfrak{E}(g \cdot m) \cdot g \star (\varphi^{-1})^{\star}\mathfrak{F}'(F(m))}.$$

Considérons X une $\mathbf{G}$-variété affine de complexité 1 décrite par un diviseur polyédral stable $(\mathfrak{D}, \mathfrak{F}, \star, \cdot)$. Nous désignons par $\mathscr{E}_X(E/\mathbf{k})$ l'ensemble des classes de conjugaison de diviseurs polyédraux stables par $\mathfrak{S}_{E/\mathbf{k}}$ sur C de la forme $(\mathfrak{D}, \mathfrak{F}', \star', \cdot')$.

Comme conséquence directe de la discussion de 4.7.7 et du fait que 3.3.9 se généralise sur un corps quelconque, nous obtenons le résultat suivant.

Corollaire 4.7.13. *Soit C une courbe régulière sur le corps E. Étant donnée une $\mathbf{G}$-variété affine X de complexité 1 associée à un diviseur polyédral $\mathfrak{S}_{E/\mathbf{k}}$-stable $(\mathfrak{D}, \mathfrak{F}, \star, \cdot)$ sur C, nous avons la bijection d'ensembles pointés*

$$\mathscr{E}_X(E/\mathbf{k}) \simeq H^1(E/\mathbf{k}, \mathrm{Aut}_{\mathbf{G}_E}(X_E)).$$

Chapitre 5

Racines des $\mathbb{T}$-variétés affines de complexité un sur un corps parfait

5.1 Introduction

Ce chapitre est tiré d'un travail en collaboration avec Alvaro Liendo. Dans ce travail, nous nous intéressons aux opérations normalisées du groupe additif dans les $\mathbb{T}$-variétés affines de complexité 1.

Afin de donner une illustration géométrique de la théorie des racines des $\mathbb{T}$-variétés, supposons d'abord que le corps de base $\mathbf{k}$ est algébriquement clos. Fixons un tore algébrique $\mathbb{T} \simeq (\mathbf{k}^\star)^n$ de dimension n. Rappelons qu'un caractère du tore $\mathbb{T}$ est un morphisme de groupes algébriques de $\mathbb{T}$ vers le groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m \simeq \mathbf{k}^\star$. Si X est une $\mathbb{T}$-variété alors une opération du groupe additif dans X,

$$\mathbb{G}_a \times X \to X, \ \ (\lambda, x) \mapsto \lambda \star x,$$

est dite normalisée par l'opération de $\mathbb{T}$ dans X,

$$\mathbb{T} \times X \to X, \ \ (t, x) \mapsto t \cdot x,$$

s'il existe un caractère α du tore $\mathbb{T}$ tel que pour tout $t \in \mathbb{T}$, pour tout $\lambda \in \mathbb{G}_a = \mathbf{k}_+$ et pour tout $x \in X$, nous avons

$$t \cdot (\lambda \star (t^{-1} \cdot x)) = (\alpha(t)\lambda) \star x.$$

Notons que cette définition peut être mise en parallèle avec la théorie des systèmes de racines des groupes de Lie. Pour simplifier, considérons le groupe linéaire GL_n sur le corps $\mathbf{k}$. Considérons un sous-groupe unipotent à 1 paramètre de la forme

$$U_{i,j} = \{u_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda \cdot E_{ij} |\, \lambda \in \mathbf{k}\},$$

où $1 \leq i, j \leq n$ sont distincts, I_n est la matrice unité d'ordre n et E_{ij} est la matrice de format $n \times n$ ayant pour coefficient 1 en position (i, j) et 0 en dehors. Soit

$$T = \{t = \mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_n) |\, t_1, t_2, \ldots, t_n \in \mathbf{k}^\star\} \subset \mathrm{GL}_n$$

le sous-groupe des matrices diagonales. Alors pour tout $t \in T$, pour tout $\lambda \in \mathbf{k}$ et pour tous $1 \leq i, j \leq n$ distincts, on a la relation

$$t \cdot u_{ij}(\lambda) \cdot t^{-1} = u_{ij}(t_i t_j^{-1} \lambda).$$

Le caractère $\alpha = \alpha_{ij} : T \to \mathbb{G}_m$, $t \mapsto t_i t_j^{-1}$ est appelé une racine de GL_n relativement au tore T. Par analogie, on peut comparer GL_n avec le groupe $\mathrm{Aut}(X)$ des automorphismes polynomiaux d'une $\mathbb{T}$-variété affine X. En effet, un sous-groupe unipotent à 1 paramètre de $\mathrm{Aut}(X)$ est une opération fidèle de $\mathbb{G}_a$ dans X. L'image du morphisme naturel $\mathbb{T} \to \mathrm{Aut}(X)$ joue le même rôle que le tore T dans le cas de GL_n. Compte tenu de la définition précédente, une racine de $\mathrm{Aut}(X)$ correspond à une opération fidèle du groupe additif dans X normalisée par l'opération de $\mathbb{T}$.

Cette analogie est aussi confirmée par les travaux de Demazure donnant une description explicite de la composante neutre du groupe des automorphismes d'une variété torique complète lisse, voir [De]. Voir aussi [AHHL] pour une généralisation aux cas des $\mathbb{T}$-variétés complètes rationnelles de complexité 1 via la théorie des anneaux totaux de coordonnées et [Li3] pour les racines du groupe $\mathrm{Aut}(\mathbb{A}^n)$. En ce qui concerne l'étude des $\mathbb{T}$-variétés affines de complexité 1, une classification par des objets combinatoires des opérations normalisées du groupe additif a été donnée par Liendo [Li] dans le cas où le corps de base $\mathbf{k}$ est algébriquement clos de caractéristique zéro. Cette dernière approche est inspirée du cas des $\mathbb{C}^\star$-surfaces affines (voir [FZ 2, FZ 3]) et de la théorie des racines de Demazure (voir [De, 4.5], [Li, 2]) pour les variétés toriques affines. Comme application, le lecteur peut consulter [AL] pour une description de certaines opérations de SL_2 dans les $\mathbb{T}$-variétés affines.

Dans ce chapitre, nous donnons une généralisation de [Li] dans le cas où $\mathbf{k}$ est un corps parfait. Donnons une liste de quelques résultats de ce chapitre.

- Nous généralisons la correspondance classique sur un corps quelconque entre opérations normalisées du groupe additif dans les variétés toriques affines et racines de Demazure, voir le théorème 5.4.5.

- Nous décrivons de façon combinatoire les opérations normalisées du groupe additif de type horizontal dans certaines variétés toriques affines sur un corps parfait, ayant une opération de tores algébriques de complexité 1, voir le théorème 5.6.8.

- Nous classifions en termes de diviseurs polyédraux les opérations normalisées du groupe additif dans les $\mathbb{T}$-variétés affines de complexité 1, sur un corps quelconque dans le cas vertical, et sur un corps parfait dans le cas horizontal, voir les théorèmes 5.5.4 et 5.6.12. En particulier, si $X = \operatorname{Spec} A$ alors on montre que $A^{\mathbb{G}_a}$ est de type fini sur $\mathbf{k}$ (voir plus généralement [Ku] lorsque la caractéristique de $\mathbf{k}$ est nulle).
- Nous montrons qu'une $\mathbb{G}_m$-surface affine non hyperbolique sur un corps parfait admettant une opération normalisée du groupe additif de type horizontal est torique, voir le corollaire 5.6.6.

Pour formuler nos résultats, nous rappelons quelques notions sur les $\mathbb{T}$-variétés affines munies d'une opération du groupe additif. À partir de maintenant, toutes les variétés sont définies sur un corps arbitraire $\mathbf{k}$. Se donner une opération du groupe additif dans une variété affine X est équivalent à fixer un système itéré de dérivations d'ordre supérieur localement fini $\partial = \{\partial^{(i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbf{k}[X]$, appelé aussi LFIHD pour abréger. Cette correspondance est donnée via le morphisme naturel

$$\mathbf{k}[X] \to \mathbf{k}[X] \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[\mathbb{G}_a], \;\; f \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} \partial^{(i)}(f) \otimes \lambda^i.$$

Lorsque $\mathbf{k}$ est de caractéristique 0, la LFIHD ∂ est uniquement déterminée par la dérivation localement nilpotente $\partial^{(1)}$; plus précisément, on a pour tout $i \in \mathbb{Z}_{>0}$, $\partial^{(i)} = (\partial^{(1)})^{\circ i}/i!$. Pour plus de renseignements sur la théorie des LFIHD, voir [Mi, Cr].

Soit $\mathbb{T}$ un tore algébrique déployé sur $\mathbf{k}$ et notons M le réseau des caractères de $\mathbb{T}$. Une opération du groupe additif dans une $\mathbb{T}$-variété affine X est dite normalisée si la LFIHD associée est homogène pour la M-graduation naturelle de $\mathbf{k}[X]$, voir 5.3.7, 5.3.9. Cela généralise pour un corps de base arbitraire la définition énoncée précédemment.

On distingue deux types d'opérations normalisées du groupe additif dans X ; si on a $\mathbf{k}(X)^{\mathbb{T}} \subset \mathbf{k}(X)^{\mathbb{G}_a}$ alors on dit que l'opération de $\mathbb{G}_a$ est de type vertical. Dans le cas contraire, l'opération de $\mathbb{G}_a$ est de type horizontal. On donne une même qualification, pour les LFIHD homogènes. D'un point de vue géométrique (i.e. lorsque $\mathbf{k}$ est algébriquement clos), une opération normalisée de $\mathbb{G}_a$ dans X est de type vertical si un quotient rationnel $X \dashrightarrow Y$ pour l'opération de $\mathbb{T}$ est $\mathbb{G}_a$-invariant ; de sorte que toute orbite générale de $\mathbb{G}_a$ est contenue dans l'adhérence d'une orbite de $\mathbb{T}$.

Soit X une $\mathbb{T}$-variété affine de complexité 1 sur un corps $\mathbf{k}$. D'après les résultats du chapitre précédent, X est décrite par un triplet $(C, \sigma, \mathfrak{D})$, où σ est un cône polyédral saillant dont le dual est le cône des poids de $\mathbf{k}[X]$, C est une courbe régulière sur $\mathbf{k}$ et $\mathfrak{D}$ est un diviseur σ-polyédral propre sur C (voir 4.6). On a un diagramme commutatif d'applications rationnelles :

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, dashed, "f"] \arrow[dr, dashed, "\pi"'] & & C \times X_\sigma \arrow[dl, "\mathrm{proj}"] \\
& C &
\end{tikzcd} ,
$$

où π est un quotient rationnel, X_σ est la variété torique associée au cône σ et f est birationnelle $\mathbb{T}$-équivariante. Voir [Ti] pour une description de l'application f en fonction de $\mathfrak{D}$ dans le cas où $\mathbf{k} = \mathbb{C}$. Suivant les arguments de démonstration de [FZ 2, 3.12], [Li, 3.1], [Li 2], pour décrire les LFIHD homogènes de type vertical sur $\mathbf{k}[X]$, il est utile de classifier les LFIHD homogènes sur $\mathbf{k}[X_\sigma]$.

Une LFIHD ∂ homogène non triviale sur l'algèbre $\mathbf{k}[X_\sigma]$ est déterminée par son degré e à la multiplication par un scalaire non nul près. Le cône des poids de la sous-algèbre M-graduée $\ker \partial$ est une face duale d'une arête ρ de σ. Le vecteur e est une racine de Demazure de rayon distingué ρ du cône σ (voir 5.4.5). Réciproquement, une racine de Demazure e du cône σ donne lieu à une LFIHD sur $\mathbf{k}[X_\sigma]$ (voir 5.4.2). Pour les LFIHD de type vertical sur $\mathbf{k}[X]$, on remarque que dans ce cas l'application f est $\mathbb{T} \ltimes \mathbb{G}_a$-équivariante. Ainsi, on obtient une description analogue au cas de X_σ avec des conditions supplémentaires attachées à $\mathfrak{D}$. Voir 5.5.5 et le théorème 5.5.4 pour une classification complète.

Passons maintenant au cas d'une opération normalisée du groupe additif de type horizontal dans une $\mathbb{T}$-variété affine X de complexité 1. Dans cette situation, l'opération naturelle de $\mathbb{T} \ltimes \mathbb{G}_a$ dans X est de complexité 0. Supposons que le corps $\mathbf{k}$ est parfait. Plus précisément, on montre que $C \simeq \mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}$ ou $C \simeq \mathbb{P}^1_{\mathbf{k}}$ (voir 5.6.2) et on a un diagramme commutatif

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{A}^1_{\mathbf{k}} \times \mathbb{T} \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr] & & X_{\widetilde{\sigma}} \arrow[dl, "\iota"] \\
& X &
\end{tikzcd} .
$$

La variété $X_{\widetilde{\sigma}}$ est torique pour un tore contenant $\mathbb{T}$. L'application ι est une immersion ouverte $\mathbb{T}$-équivariante faisant de $X_{\widetilde{\sigma}}$ un ouvert principal de Zariski. Le morphisme ϕ est un revêtement cyclique $\mathbb{T}$-équivariant. En fait, l'opération de $\mathbb{G}_a$ dans X provient d'une opération de $\mathbb{G}_a$ dans $\mathbb{A}^1_{\mathbf{k}} \times \mathbb{T}$ sur le premier facteur, de sorte que le morphisme $\iota \circ \phi$ respecte les opérations de $\mathbb{T} \ltimes \mathbb{G}_a$. Par conséquent, nous procédons en deux étapes. Tout d'abord, on décrit de façon combinatoire les opérations normalisées de $\mathbb{G}_a$ de type horizontal dans la $\mathbb{T}$-variété $X_{\widetilde{\sigma}}$, voir 5.6.8. Ensuite, on donne des conditions sur $\mathfrak{D}$

pour que l'application ι soit $\mathbb{T} \ltimes \mathbb{G}_a$-équivariante, voir 5.6.11. On obtient ainsi une classification complète, voir 5.6.12.

Donnons un court résumé de chaque section de ce chapitre. Dans la section 5.3, on donne quelques propriétés générales sur les opérations normalisées du groupe additif dans les $\mathbb{T}$-variétés affines. Dans la section 5.4, on donne une description des LFIHD homogènes pour les algèbres de variétés toriques affines. Enfin dans les sections 5.5 et 5.6, on traite respectivement les cas vertical et horizontal.

5.2 Introduction (english version)

This chapter is a joint work with Alvaro Liendo. In this work, we are interested in normalized $\mathbb{G}_a$-actions on affine $\mathbb{T}$-varieties of complexity 1.

In order to give a geometric illustration of the roots theory of $\mathbb{T}$-varieties, let us assume first that the ground field $\mathbf{k}$ is algebraically closed. Fix an n-dimensional algebraic torus $\mathbb{T} \simeq (\mathbf{k}^\star)^n$. Recall that a character of the torus $\mathbb{T}$ is a morphism of algebraic groups from $\mathbb{T}$ to the multiplicative group $\mathbb{G}_m \simeq \mathbf{k}^\star$. If X is a $\mathbb{T}$-variety then an additive group action on X,

$$\mathbb{G}_a \times X \to X, \ \ (\lambda, x) \mapsto \lambda \star x,$$

is called normalized by the $\mathbb{T}$-action on X,

$$\mathbb{T} \times X \to X, \ \ (t, x) \mapsto t \cdot x,$$

if there exists a character α of $\mathbb{T}$ such that for all $t \in \mathbb{T}$, $\lambda \in \mathbb{G}_a = \mathbf{k}_+$, and $x \in X$ we have

$$t \cdot (\lambda \star (t^{-1} \cdot x)) = (\alpha(t)\lambda) \star x.$$

This definition can be compared with the notion of roots in the classical Lie theory. For simplicity, let us consider the general linear group GL_n over the field $\mathbf{k}$. Consider a 1-parameter unipotent subgroup of GL_n of the form

$$U_{i,j} = \{u_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda \cdot E_{ij} | \, \lambda \in \mathbf{k}\} \, ,$$

where $1 \leq i, j \leq n$ are distinct indices, I_n is the neutral element in GL_n and E_{ij} is the matrix with entry 1 in position (i, j) and 0's elsewhere. Letting

$$T = \{t = \mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_n) | \, t_1, t_2, \ldots, t_n \in \mathbf{k}^\star\} \subset \mathrm{GL}_n$$

be the subgroup of diagonal matrices we have for all $t \in T$, $\lambda \in \mathbf{k}$, and for all distinct $1 \leq i, j \leq n$ the relation

$$t \cdot u_{ij}(\lambda) \cdot t^{-1} = u_{ij}(t_i t_j^{-1}\lambda).$$

The character $\alpha = \alpha_{ij} : T \to \mathbb{G}_m$, $t \mapsto t_i t_j^{-1}$ is called a root of GL_n for the torus T.

Similarly, one can compare GL_n with the group $\mathrm{Aut}(X)$ which consists of polynomial automorphisms of the affine $\mathbb{T}$-variety X. Indeed, a 1-parameter unipotent subgroup in $\mathrm{Aut}(X)$ is a faithful $\mathbb{G}_a$-action on the variety X. The image of the natural morphism $\mathbb{T} \to \mathrm{Aut}(X)$ plays the same role as the torus T does in the case of GL_n. Finally, by our definitions, a root of $\mathrm{Aut}(X)$ corresponds to a faithful normalized additive group action on the $\mathbb{T}$-variety X.

This analogy is also confirmed by the work of Demazure giving an explicit method to describe the neutral component of the automorphism group of a smooth complete toric variety, see [De]. See also [AHHL] for generalization to the case of rational complete $\mathbb{T}$-varieties via the total coordinate rings and [Li3] for the roots of $\mathrm{Aut}(\mathbb{A}^n)$.

Concerning the study of affine $\mathbb{T}$-varieties of complexity 1, a complete classification of normalized additive group actions in combinatorial terms is given in [Li] when the base field $\mathbf{k}$ is algebraically closed of characteristic 0. This latter approach were inspired by the case of complex affine $\mathbb{C}^\star$-surfaces (see [FZ 2, FZ 3]) and the theory of Demazure roots for affine toric varieties (see [De, 4.5], [Li, 2]). As an application, the reader may consult [AL] for a description of particular SL_2-actions on affine $\mathbb{T}$-varieties. In this chapter, we provide a generalization of [Li] to the case where $\mathbf{k}$ is a perfect field. Let us list some significant results.

-We generalize the classical correspondence for an arbitrary field between normalized additive group actions on affine toric varieties and Demazure roots, see Theorem 5.4.5.

-We describe normalized additive group actions of horizontal type on a class of affine toric varieties having a torus action of complexity 1, see Theorem 5.6.8.

-We classify in terms of polyhedral divisors the normalized additive group actions on affine $\mathbb{T}$-varieties of complexity 1, over an arbitrary field for the vertical case, and over a perfect field for the horizontal case, see Theorems 5.5.4 and 5.6.12. In particular, if $X = \mathrm{Spec}\, A$ then we show that the subalgebra $A^{\mathbb{G}_a}$ is finitely generated over $\mathbf{k}$ (more generally, see [Ku] for the characteristic 0 setting).

-Every non-hyperbolic affine $\mathbb{G}_m$-surface over a perfect field which has a normalized additive group action of horizontal type is toric, see Corollary 5.6.6.

In order to formulate our results let us recall some notions concerning affine $\mathbb{T}$-varieties with an additive group action. Below, the varieties are defined over an arbitrary field $\mathbf{k}$. Giving an additive group action on an affine variety X is equivalent to fixing a locally finite iterative higher derivation $\partial = \{\partial^{(i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ on the algebra $\mathbf{k}[X]$, called LFIHD for short. This correspondence is given via the natural morphism

$$\mathbf{k}[X] \to \mathbf{k}[X] \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[\mathbb{G}_a], \;\; f \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} \partial^{(i)}(f) \otimes \lambda^i.$$

If $\mathbf{k}$ is of characteristic 0 then the LFIHD ∂ is uniquely determined by the locally nilpotent derivation $\partial^{(1)}$. More precisely, for any $i \in \mathbb{Z}_{>0}$ we have $\partial^{(i)} = (\partial^{(1)})^{\circ i}/i!$. See [Mi, Cr] for more details about LFIHDs.

Let $\mathbb{T}$ be a split algebraic torus over $\mathbf{k}$ and denote by M the character lattice of $\mathbb{T}$. An additive group action on a $\mathbb{T}$-variety X is called normalized if the associated LFIHD is homogeneous for the natural M-grading on $\mathbf{k}[X]$, see 5.3.7, 5.3.9. This generalizes to an arbitrary field the previous geometric definition. To classify normalized $\mathbb{G}_a$-actions on X it is convenient to distinguish two types of them. If $\mathbf{k}(X)^{\mathbb{T}} \subset \mathbf{k}(X)^{\mathbb{G}_a}$ then we say that the $\mathbb{G}_a$-action is of vertical type. Otherwise, the $\mathbb{G}_a$-action is horizontal. We give the same names for homogeneous LFIHD. From a geometric viewpoint (i.e. when $\mathbf{k}$ is algebraically closed), a normalized $\mathbb{G}_a$-action on X is of vertical type if a rational quotient $X \dashrightarrow Y$ for the $\mathbb{T}$-action is $\mathbb{G}_a$-invariant, so that a $\mathbb{G}_a$-orbit in general position is contained in the closure of a $\mathbb{T}$-orbit.

Let X be an affine $\mathbb{T}$-variety of complexity 1 over a field $\mathbf{k}$. According to the results of the previous chapter, X can be described by a triplet $(C, \sigma, \mathfrak{D})$, where σ is a strongly convex polyhedral cone equal to the dual cone of the weight cone of $\mathbf{k}[X]$, C is a regular curve over $\mathbf{k}$, and $\mathfrak{D}$ is a proper σ-polyhedral divisor on C (see 4.6). We have a commutative diagram of rational maps

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, dashed, "f"] \arrow[dr, dashed, "\pi"'] & & C \times X_\sigma \arrow[dl, "\mathrm{proj}"] \\ & C & \end{tikzcd},$$

where π is a rational quotient, X_σ is the toric variety associated to σ, and f is a $\mathbb{T}$-equivariant birational map. See [Ti] for a description of the map f in terms of $\mathfrak{D}$ and in the case where $\mathbf{k} = \mathbb{C}$. Following the argument in [FZ 2, 3.12], [Li, 3.1], [Li 2], to describe homogeneous LFIHDs of vertical type on $\mathbf{k}[X]$ it is useful to classify homogeneous LFIHD on $\mathbf{k}[X_\sigma]$.

Actually, a non-trivial homogeneous LFIHD ∂ on $\mathbf{k}[X_\sigma]$ is uniquely determined (up to the multiplication by a nonzero scalar) by its degree e. The weight cone of the M-graded subalgebra $\ker\partial$ is the dual face of a ray $\rho \subset \sigma$. The lattice vector e is a Demazure root with distinguished ray ρ of the cone σ (see 5.4.5). Conversely, a

Demazure root e of the cone σ gives rise to a homogeneous LFIHD on $\mathbf{k}[X_\sigma]$ (see 5.4.2). For the LFIHDs of vertical type on $\mathbf{k}[X]$, we remark that in this case the map f is $\mathbb{T} \ltimes \mathbb{G}_a$-equivariant. Thus, one obtains a similar description as for the variety X_σ with additional conditions provided by the polyhedral divisor $\mathfrak{D}$. See 5.5.5 and Theorem 5.5.4 for a complete classification.

Let us pass to the case of normalized additive group action of horizontal type on an affine $\mathbb{T}$-variety X of complexity 1. In this situation, the natural $\mathbb{T} \ltimes \mathbb{G}_a$-action on X is of complexity 0. Assume that the field $\mathbf{k}$ is perfect. More precisely, one can show that $C \simeq \mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}$ or $C \simeq \mathbb{P}^1_{\mathbf{k}}$ (see 5.6.2) and we have a commutative diagram

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A}^1_{\mathbf{k}} \times \mathbb{T} \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr] & & X_{\widetilde{\sigma}} \arrow[dl, "\iota"] \\ & X & \end{tikzcd} .$$

The variety $X_{\widetilde{\sigma}}$ is toric for a torus containing $\mathbb{T}$. The map ι is an open $\mathbb{T}$-equivariant immersion making $X_{\widetilde{\sigma}}$ a Zariski principal open subset. The morphism ϕ is a $\mathbb{T}$-equivariant cyclic covering. Actually, the $\mathbb{G}_a$-action on X can be obtained from a $\mathbb{G}_a$-action on $\mathbb{A}^1_{\mathbf{k}} \times \mathbb{T}$ on the first factor, so that the morphism $\iota \circ \phi$ respects the $\mathbb{T} \ltimes \mathbb{G}_a$-actions. Therefore, we proceed in two steps. First of all, one describes the normalized $\mathbb{G}_a$-actions of horizontal type on the $\mathbb{T}$-variety $X_{\widetilde{\sigma}}$, see 5.6.8. Then, we provide some conditions on $\mathfrak{D}$ for the map ι to be $\mathbb{T} \ltimes \mathbb{G}_a$-equivariant, see 5.6.11. We obtain as well a complete classification, see 5.6.12.

Let us give a brief summary of the contents of each section. In Section 5.3, we give some general properties of normalized additive group actions on $\mathbb{T}$-varieties. In Section 5.4, we provide a description of homogeneous LFIHD for algebras of affine toric varieties. Finally, Sections 5.5 and 5.6 treat respectively the vertical and horizontal cases.

5.3 Opérations du groupe additif et L.F.I.H.D. homogènes

Dans cette section, nous nous intéressons à une relation entre les opérations de $\mathbb{G}_a$, qui sont normalisées par une opération d'un tore algébrique déployé, et aux systèmes itérés de dérivations d'ordre supérieur localement finis (LFIHD). Soit $\mathbf{k}$ un corps et désignons par $X = \operatorname{Spec} A$ une variété affine sur $\mathbf{k}$.

5.3.1. Tout d'abord, considérons une opération

$$\phi : \mathbb{G}_a \times X \to X$$

du groupe additif $\mathbb{G}_a$ sur le corps $\mathbf{k}$. Alors le morphisme d'algèbres $\phi^\star$ donne une suite d'opérateurs linéaires $\partial = \{\partial^{(i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ de l'espace vectoriel A sur $\mathbf{k}$ définie de la manière suivante. Pour chaque élément $f \in A$, nous écrivons

$$\phi^\star(f) = \sum_{i=0}^{\infty} \partial^{(i)}(f) \cdot x^i \in A \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[\mathbb{G}_a],$$

où l'algèbre des fonctions régulières de $\mathbf{k}[\mathbb{G}_a] = \mathbf{k}[x]$ est celle des polynômes à une variable x. Un calcul facile sur les algèbres de Hopf montre que ∂ vérifie les conditions suivantes (cf. [Mi]).

(i) L'opérateur $\partial^{(0)}$ est l'application identité.

(ii) Pour tout entier $i \in \mathbb{N}$ et tous $f_1, f_2 \in A$, nous avons la *règle de Leibniz*

$$\partial^{(i)}(f_1 \cdot f_2) = \sum_{j=0}^{i} \partial^{(j)}(f_1) \cdot \partial^{(i-j)}(f_2).$$

(iii) La suite ∂ est localement finie. Cela veut dire que pour tout $f \in A$, il existe $r \in \mathbb{Z}_{>0}$ tel que pour tout entier $i \geq r$, $\partial^{(i)}(f) = 0$.

(iv) Pour tous $i, j \in \mathbb{N}$ et toute fonction régulière $f \in A$, on a

$$\left(\partial^{(i)} \circ \partial^{(j)}\right)(f) = \binom{i+j}{i} \partial^{(i+j)}(f).$$

Une suite d'opérateurs linéaires ∂ sur l'algèbre A satisfaisant les conditions (i), (ii), (iii), (iv) est appelée *un système itéré de dérivations d'ordre supérieur localement fini.* Suivant la convention anglaise, nous disons plutôt que ∂ est une LFIHD. Précisons que les conditions (i), (ii) correspondent aux lettres H et D (dérivations d'ordre supérieur), la condition (iii) aux lettres L et F (localement fini) et (iv) à la lettre I (itéré). Par exemple si ∂ vérifie seulement (i), (ii), (iv) alors on dit que ∂ est un *système itéré de dérivations d'ordre supérieur.*

Plus généralement, le lecteur peut consulter [HaSc] pour la notion de dérivations de Hasse-Schmit et [Voj] pour des applications à la géométrie algébrique. Réciproquement, étant donnée une LFIHD ∂ sur l'algèbre A, son *application exponentielle*

$$e^{x\partial} := \sum_{i=0}^{\infty} \partial^{(i)}\, x^i$$

est le morphisme provenant d'une opération du groupe additif $\mathbb{G}_a$ dans la variété $X = \operatorname{Spec} A$. De cette manière, on a une correspondance bijective entre l'ensemble des opérations du groupe additif dans X et l'ensemble des LFIHD sur $\mathbf{k}[X]$.

Remarque 5.3.2. Considérons une LFIHD ∂ sur A. Pour $i \in \mathbb{Z}_{>0}$, nous considérons

$$\left(\partial^{(1)}\right)^{\circ i} = \partial^{(1)} \circ \ldots \circ \partial^{(1)}$$

la composition de i exemplaires de $\partial^{(1)}$. En désignant par p la caractéristique du corps $\mathbf{k}$, on a l'égalité

$$\partial^{(i)} = \frac{\left(\partial^{(1)}\right)^{\circ i_0} \circ \left(\partial^{(p)}\right)^{\circ i_1} \circ \ldots \circ \left(\partial^{(p^r)}\right)^{\circ i_r}}{(i_0)!(i_1)! \ldots (i_r)!},$$

où $i = \sum_{j=1}^{r} i_j \cdot p^j$ est le développement p-adique [1] de l'entier i. Lorsque $p = 0$ l'opération du groupe additif $\mathbb{G}_a$ est par conséquent uniquement déterminée par la dérivation localement nilpotente $\partial^{(1)}$.

En caractéristique zéro, l'algèbre des invariants d'une opération du groupe additif dans la variété $X = \operatorname{Spec} A$ est le noyau de la dérivation localement nilpotente associée sur A. La définition suivante décrit cette situation dans le cas de la caractéristique arbitraire.

Définition 5.3.3. Pour une LFIHD ∂ sur l'algèbre A, son *noyau* est le sous-ensemble

$$\ker \partial := \left\{ f \in A \,|\, \text{pour tout } i \in \mathbb{Z}_{>0},\ \ \partial^{(i)}(f) = 0 \right\}.$$

C'est l'algèbre des invariants $A^{\mathbb{G}_a} \subset A$ pour l'opération de $\mathbb{G}_a$ correspondante à ∂. La LFIHD ∂ est dite *triviale* si $\ker \partial = A$. Un sous-espace vectoriel $V \subset A$ est appelé ∂-*stable* si pour chaque entier $i \in \mathbb{N}$, nous avons l'inclusion $\partial^{(i)}(V) \subset V$. En particulier, le sous-espace vectoriel $\ker \partial$ est ∂-stable.

Le prochain résultat donne des propriétés utiles sur les opérations du groupe additif (voir [CM, Cr]). Notons qu'il existe des analogues bien connus aux assertions suivantes dans le contexte des dérivations localement nilpotentes. Pour plus de détails voir [Fre].

Proposition 5.3.4. *Pour toute* LFIHD *non triviale ∂ sur l'algèbre A, les assertions suivantes sont vraies.*

1. Si $p = 0$ alors on convient que le développement p-adique est $i = i_0$.

(a) *Le sous-anneau* $\ker\partial \subset A$ *est factoriellement clos , c'est à dire, pour tous* $f_1, f_2 \in A$,

$$f_1 \cdot f_2 \in \ker\partial - \{0\} \Rightarrow f_1, f_2 \in \ker\partial.$$

(b) *Le sous-anneau* $\ker\partial$ *est algébriquement clos dans* A *; tout élément de* A *satisfaisant une relation de dépendance algébrique à coefficients dans* $\ker\partial$ *appartient à* $\ker\partial$.

(c) $\ker\partial$ *est une sous-algèbre de dimension* $\dim A - 1$.

(d) *Si* $\operatorname{car}\mathbf{k} = p > 0$ *et si* $A = \mathbf{k}[y]$ *est l'algèbre des polynômes à une variable alors il existe des scalaires* $c_1, \ldots, c_r \in \mathbf{k}^\star$ *et une suite strictement croissante d'entiers* $0 < s_1 < \ldots < s_r$ *tels que l'on ait l'égalité*

$$e^{x\partial}(y) = y + \sum_{i=1}^{r} c_i \cdot x^{p^{s_i}}.$$

(e) *Si* $A^\star$ *représente l'ensemble des éléments inversibles (pour la multiplication) de* A *alors nous avons* $A^\star \subset \ker\partial$ *; de sorte que,* $A^\star = (\ker\partial)^\star$.

(f) *Un idéal principal* $(f) = fA$ *est* ∂*-stable si et seulement si* $f \in \ker\partial$.

Pour les assertions (a), (b), (c) nous renvoyons le lecteur à [CM, 2.1, 2.2] et à l'exemple 3.5 dans [Cr]. Notons que les assertions (a), (b) sont obtenues en utilisant la fonction degré par rapport à la variable x,

$$A - \{0\} \to \mathbb{N}, \ \ f \mapsto \deg_x e^{x\partial}(f).$$

En particulier, nous remarquons que (b) implique que l'anneau $\ker\partial$ est normal si A est normal. L'assertion (e) est une conséquence immédiate de (a). L'assertion (d) est aisée et laissée au lecteur [2] En utilisant les arguments de démonstration de [FZ 2, 1.2 (b)] nous obtenons l'assertion (f) :

Démonstration. (f) Par la propriété 5.3.1 (iii), nous pouvons considérer $d \in \mathbb{Z}_{>0}$ tel que $f' := \partial^{(d)}(f) \neq 0$ appartient à $\ker\partial$. Si l'idéal (f) est ∂-stable alors $f' \in \ker\partial \cap (f)$, de sorte que $f' = af$, pour un certain élément $a \in A$. Par l'assertion 5.3.4 (a), nous obtenons $f \in \ker\partial$. Réciproquement, soit $a' \in A$. En utilisant 5.3.1 (ii), pour chaque $i \in \mathbb{N}$, nous avons $\partial^{(i)}(a'f) = \partial^{(i)}(a')f$ et donc l'idéal (f) est ∂-stable. □

2. L'esquisse de démonstration suivante de l'assertion (d) est suggérée par un des membres du jury que nous remerçions. L'ensemble $\mathrm{Hom}(\mathbb{G}_{\mathrm{a}}, \mathrm{Aut}(\mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}))$ des opérations de $\mathbb{G}_a$ dans $\mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}$ s'identifie naturellement à l'ensemble $\mathrm{End}(\mathbb{G}_a)$ des endomorphismes du groupe algébrique $\mathbb{G}_a$. Une vérification directe montre que $\mathrm{End}(\mathbb{G}_a)$ est l'ensemble des p-polynômes sur $\mathbb{G}_a$.

Dans le lemme suivant, nous étudions les extensions des LFIHD sur un localisé $T^{-1}A$ donné par une partie multiplicative $T \subset A$. Pour l'énoncé ci-dessous, nous nous sommes inspirés des identités remarquables bien connues des dérivations de Hasse-Teichmüller (voir [JKS, §2]).

Lemme 5.3.5. *Soit T un sous-ensemble de A contenant 1, stable par la multiplication de A et tel que $0 \notin T$. Soit ∂ un système itéré de dérivations d'ordre supérieur sur l'algèbre A. Pour tous $i, j \in \mathbb{Z}_{>0}$ tels que $j \leq i$, nous posons*

$$E(i,j) = \left\{ (s_1, \ldots, s_j) \in \mathbb{Z}^j_{>0},\ \sum_{l=1}^{j} s_l = i \right\}.$$

Alors ∂ s'étend en un unique système itéré de dérivations d'ordre supérieur $\bar{\partial} = \{\bar{\partial}^{(i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ sur l'algèbre $T^{-1}A$. Pour tout $f \in T$ et pour tout $i \in \mathbb{Z}_{>0}$, on a l'égalité

$$\bar{\partial}^{(i)}\left(\frac{1}{f}\right) = \sum_{j=1}^{i} \frac{(-1)^j}{f^{j+1}} \sum_{(s_1,\ldots,s_j)\in E(i,j)} \partial^{(s_1)}(f) \ldots \partial^{(s_j)}(f)\,.$$

De plus, si ∂ est une LFIHD *sur A et si $T \subset \ker \partial$ alors $\bar{\partial}$ est une* LFIHD *sur $T^{-1}A$.*

Démonstration. L'existence et l'unicité de $\bar{\partial}$ sont données dans [Ma, 3.7, 5.8], [Voj, Section 3]. En procédant par récurrence, le calcul de $\bar{\partial}^{(i)}(\frac{1}{f})$ est une conséquence de la propriété 5.3.1 (ii). Le reste de la démonstration est facile. □

Comme conséquence du lemme précédent, nous obtenons un résultat sur les revêtements cycliques d'une variété affine munie d'une opération du groupe additif (voir aussi [FZ 2, Lemma 1.8]).

Corollaire 5.3.6. *Posons $K = \mathrm{Frac\,A}$. Considérons une* LFIHD *∂ sur A et $f \in \ker \partial$ un élément non nul. Soient $d \in \mathbb{Z}_{>0}$ et u un élément algébrique sur K satisfaisant $u^d - f = 0$. Si B est la fermeture intégrale de $A[u]$ dans son corps des fractions alors ∂ s'étend en une unique* LFIHD *∂' sur l'algèbre B telle que $u \in \ker \partial'$.*

Démonstration. Par le lemme 5.3.5, on peut étendre la LFIHD ∂ sur A en un système itéré de dérivations d'ordre supérieur sur le corps K, et sur l'algèbre des polynômes à une variable $K[t]$ en posant $\bar{\partial}^{(i)}(t) = 0$, pour tout entier $i \geq 1$. Considérons le morphisme de K-algèbres $\phi : K[t] \to K[u]$, $t \mapsto u$. Soit $P \in K[t]$ le polynôme unitaire engendrant l'idéal $\ker \phi$. Nous pouvons écrire $t^d - f = FP$, pour un polynôme $F \in K[t]$. Remarquons que F est également unitaire. Puisque A est un anneau intégralement clos, nous obtenons $F, P \in A[t]$. De plus, pour tout $i \in \mathbb{Z}_{>0}$, $\bar{\partial}^{(i)}(FP) = \bar{\partial}^{(i)}(t^d - f) = 0$. Notons que $A[t]$ est $\bar{\partial}$-stable et que la restriction de $\bar{\partial}$ à $A[t]$ est une LFIHD. Par conséquent par la proposition 5.3.4. (a), $P \in A[t] \cap \ker \bar{\partial}$, définissant un système itéré de dérivations d'ordre supérieur ∂' sur $A[u]$. Ensuite, on remarque que l'opération de $\mathbb{G}_a$ dans $\operatorname{Spec} A[u]$ correspondante à ∂' se prolonge sur B par la propriété universelle de la normalisation. Le reste de la démonstration suit aisément. □

Dans la suite, nous considérons un tore algébrique déployé $\mathbb{T} \simeq \mathbb{G}_m^n$ sur le corps $\mathbf{k}$ et nous notons $M = \operatorname{Hom}(\mathbb{T}, \mathbb{G}_m)$ son réseau des caractères. Comme d'habitude pour un vecteur $m \in M$, nous notons par χ^m le monôme de Laurent associé. Nous supposons aussi que A est M-graduée et nous écrivons [3]

$$A = \bigoplus_{m \in \sigma_M^\vee} A_m \chi^m \subset K_0[M] \text{ avec } K_0 = (\operatorname{Frac} A)^{\mathbb{T}} \text{ et } A_m \subset K_0,$$

pour tout $m \in \sigma_M^\vee$. Introduisons la notion de systèmes itérés de dérivations d'ordre supérieur homogènes.

Définition 5.3.7. Soit ∂ un système itéré de dérivations d'ordre supérieur. Considérons un vecteur $e \in M$. La suite ∂ est dite *homogène de degré* e si pour chaque $i \in \mathbb{N}$ et pour tout $m \in M$, nous avons la relation

$$\partial^{(i)}(A_m \chi^m) \subset A_{m+ie} \chi^{m+ie}.$$

Le vecteur e est appelé le *degré* de ∂ et on le note parfois par $\deg \partial$.

Dans le cas où $\mathbf{k}$ est un corps de caractéristique $p > 0$, nous avons une définition plus générale. Étant donné $r \in \mathbb{N}$, nous disons que ∂ est *rationnellement homogène* de degré e/p^r (ou de bidegré (e, r)) s'il satisfait les assertions suivantes.

(i) Si $i \in \mathbb{N}$ alors pour chaque m, l'application $\partial^{(ip^r)}$ envoie $A_m \chi^m$ dans $A_{m+ie} \chi^{m+ie}$.

(ii) $\partial^{(j)} = 0$ lorsque p^r ne divise pas j.

Dans [Li, Section 1.2] on montre qu'une dérivation usuelle sur une algèbre multigraduée qui envoie une pièce graduée dans une autre est homogène. Cependant, cela n'est pas vrai en général pour les systèmes de dérivations d'ordre supérieur. Notons également que le noyau d'une LFIHD homogène ∂ sur A est une sous-algèbre M-graduée de A. Dans la suite, nous introduisons quelques notions dans le but d'avoir une interprétation géométrique [4] des LFIHD homogènes et rationnellement homogènes.

3. Notons que la condition "$A_m \subset K_0$, pour tout $m \in \sigma_M^\vee$" est une hypothèse supplémentaire par rapport aux autres conditions énoncées.

4. On remarquera que les paragraphes 5.3.8, 5.3.9 se généralisent aux contextes des schémas en groupes et des algèbres de Hopf, lorsque $\mathbf{k}$ est un corps arbitraire.

Notation 5.3.8. Supposons que $\mathbf{k}$ est algébriquement clos. Alors on rappelle que le groupe des $\mathbf{k}$-points de $\mathbb{T}$ est isomorphe au groupe abstrait $(\mathbf{k}^\star)^n$. Soit $e \in M$ un vecteur de réseau. Désignons par G_e le groupe dont l'ensemble sous-jacent est $\mathbb{T} \times \mathbb{G}_a$ et la loi de composition interne est définie par

$$(t_1, \alpha_1) \cdot (t_2, \alpha_2) = (t_1 \cdot t_2, \chi^{-e}(t_2) \cdot \alpha_1 + \alpha_2),$$

où $t_i \in \mathbb{T}$ et $\alpha_i \in \mathbb{G}_a$. En fait, tout produit semi-direct $\mathbb{T} \ltimes \mathbb{G}_a$ donné par un caractère algébrique $\chi^{-e} : \mathbb{T} \to \operatorname{Aut} \mathbb{G}_a \simeq \mathbb{G}_m$ est isomorphe à un groupe de la forme G_e.

La proposition suivante est presque analogue à [FZ 2, Lemma 2.2]. Par commodité nous incluons une courte démonstration.

Proposition 5.3.9. *Supposons que* $\mathbf{k}$ *est un corps algébriquement clos.*

(i) *Si A est M-graduée et si ∂ est une* LFIHD *homogène sur A et de degré e alors l'opération de $\mathbb{G}_a$ correspondante est normalisée par l'opération de $\mathbb{T}$. Cela signifie que le groupe G_e opère dans la variété $X = \operatorname{Spec} \mathrm{A}$. Le morphisme associé est donné par*

$$\phi(t, \alpha) = t \cdot e^{\alpha\partial}(f),$$

où $(t, \alpha) \in G_e$ et $f \in A$.

(ii) *Réciproquement, si G_e opère dans $X = \operatorname{Spec} \mathrm{A}$ alors les opérations des sous-groupes $\mathbb{T}$ et $\mathbb{G}_a$ donnent respectivement une M-graduation sur A et une* LFIHD *homogène de degré e.*

(iii) *Supposons que* $\operatorname{car} \mathbf{k} = p > 0$. *Soit $F_r : \mathbb{G}_a \to \mathbb{G}_a$, $t \mapsto t^{p^r}$ le morphisme de Frobenius géométrique itéré. Se donner une* LFIHD *rationnellement homogène de degré e/p^r sur A est équivalent à se donner une opération $\mathbb{G}_a \times X \to X$ égale à $\psi \circ (F_{p^r}, \mathrm{id}_X)$ où ψ est une opération de $\mathbb{G}_a$ normalisée par $\mathbb{T}$ comme dans l'assertion* (i) *ci-dessus.*

Démonstration. (i) Étant donnés $(t, \alpha) \in G_e$ et $f \in A$, par homogénéité de ∂, nous avons pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$t \cdot \partial^{(i)}(f) = \chi^{ie}(t)\, \partial^{(i)}(t \cdot f). \tag{5.1}$$

Cela donne

$$t \cdot e^{\alpha\partial}(f) = \sum_{i=0}^{\infty} \chi^{ie}(t)\alpha^i\, \partial^{(i)}(t \cdot f) = e^{\chi^e(t)\alpha\partial}(t \cdot f).$$

D'où pour tous $(t_1,\alpha_1),(t_2,\alpha_2)\in G_e$,

$$\phi((t_1,\alpha_1)\cdot(t_2,\alpha_2))(f)=e^{\chi^e(t_1)\alpha_1\partial}\circ e^{\chi^e(t_1t_2)\alpha_2\partial}(t_1t_2\cdot f)=\phi(t_1,\alpha_1)(\phi(t_2,\alpha_2)(f)).$$

On conclut que ϕ définit une opération de G_e dans la variété $X=\operatorname{Spec} A$.

(ii) L'opération du sous-groupe $\mathbb{G}_a\subset G_e$ donne une LFIHD ∂ sur l'algèbre A. Pour $\alpha\in\mathbb{G}_a$ et $f\in A$, nous avons $\phi(1,\alpha)(f)=e^{\alpha\partial}(f)$. Donc pour tout $t\in\mathbb{T}$, il vient

$$t\cdot e^{\alpha\partial}(f)=\phi((1,\chi^e(t)\alpha)\cdot(t,0))(f)=e^{\chi^e(t)\alpha\partial}(t\cdot f).$$

En identifiant les coefficients nous obtenons (5.1). Ainsi, la LFHID ∂ est homogène pour la M-graduation donnée par l'opération du sous-groupe $\mathbb{T}\subset G_e$. L'assertion (iii) suit immédiatement de (i), (ii). $\square$

Pour un corps arbitraire $\mathbf{k}$, nous considérons la définition naturelle suivante.

Définition 5.3.10. Supposons que le tore $\mathbb{T}$ opère dans $X=\operatorname{Spec} A$. Une opération de $\mathbb{G}_a$ dans X est dite *normalisée* (resp. *normalisée à Frobenius près*) par l'opération de $\mathbb{T}$ si la LFIHD correspondante ∂ est homogène (resp. rationnellement homogène).

Pour classifier les opérations normalisées de $\mathbb{G}_a$, il est commode de les séparer en deux types (voir [FZ 2, 3.11] et [Li, 1.11] pour des cas spécifiques).

Définition 5.3.11. Une LFIHD homogène ∂ est dite de type *vertical* (ou aussi de type fibre) si $\bar{\partial}^{(i)}(K_0)=\{0\}$, pour tout $i\in\mathbb{Z}_{>0}$. Dans le cas contraire, on dit que ∂ est de *type horizontal.* Nous utilisons des qualifications analogues pour les opérations normalisées du groupe additif $\mathbb{G}_a$. Une $\mathbb{T}$-variété affine déployée est dite *vertical* (resp. *horizontal*) si elle est munie d'une opération normalisée de $\mathbb{G}_a$ de type vertical (resp. horizontal).

Bien sûr, une LFIHD homogène de type horizontal n'est pas triviale. Dans le cas vertical, on peut étendre une LFIHD homogène sur A en une LFIHD de l'algèbre de monoïde $K_0[\sigma_M^\vee]$ par endomorphismes K_0-linéaires.

Lemme 5.3.12. *Soit ∂ une* LFIHD *homogène de type vertical sur l'algèbre M-graduée A. Alors ∂ s'étend en un unique système itéré de K_0-dérivations d'ordre supérieur localement fini sur l'algèbre de monoïde $K_0[\sigma_M^\vee]$.*

Démonstration. Par le lemme 5.3.5, la LFIHD ∂ s'étend en un système itéré de dérivations d'ordre supérieur ∂' sur $K_0[M]$. Puisque ∂ est de type vertical, la condition 5.3.1(iii) implique que chaque $\partial'^{(i)}$ est une application K_0-linéaire. Par conséquent, si

$S \subset M$ est le monoïde des poids de l'algèbre M-graduée A alors $B := K_0[S] = A \otimes_{\mathbf{k}} K_0$ est ∂'-stable. Montrons que $\partial'|_B$ est une LFIHD sur B. Soit $f\chi^m \in B$ un élément homogène avec $f \in K_0^\star$. Écrivons $f\chi^m = f'h\chi^m$, pour $f' \in K_0$ et $h \in A_m$. Il existe $r \in \mathbb{Z}_{>0}$ tel que pour tout $i \geq r$,

$$\partial'^{(i)}(f\chi^m) = f'\partial^{(i)}(h\chi^m) = 0.$$

Puisque chaque élément de B est une somme d'éléments homogènes, on conclut que $\partial'|_B$ est localement finie sur B. Ainsi, $\partial'|_B$ s'étend en une LFIHD $\bar{\partial}$ sur la fermeture intégrale $\bar{B} = K_0[\sigma_M^\vee]$ (voir [Se] et [Ma, 5.8]). $\square$

Dans les deux prochaines assertions, nous donnons quelques résultats élémentaires sur les LFIHD de l'algèbre des polynômes à une variable. Ces résultats seront utiles pour étudier les opérations normalisées du groupe additif de type horizontal de la section 5.6.

Lemme 5.3.13. *Supposons que la caractéristique du corps* $\mathbf{k}$ *est un nombre premier* p. *Soit* ∂ *une* LFIHD *sur l'algèbre des polynômes* $k[t]$ *à une variable* t. *Écrivons*

$$e^{x\partial}(t) = t + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x^{p^{s_i}},$$

où $\lambda_i \in \mathbf{k}^\star$ *et* $s_1 < \ldots < s_r$ *sont des entiers naturels* (*voir* 5.3.4(d)). *Nous considérons la valuation naturelle*

$$\text{ord} : \mathbf{k}[t] - \{0\} \to \mathbb{N}, \ \sum_i a_i t^i \mapsto \min\{i \mid a_i \neq 0\}$$

et nous fixons un entier $i \in \mathbb{N}$. *Si* $l \in \mathbb{N}$ *vérifie* $l \geq ip^{s_1}$ *alors*

$$\partial^{(ip^{s_1})}(t^l) = \lambda_1^i \binom{l}{i} t^{l-i},$$

et par conséquent $\text{ord}\,\partial^{(ip^{s_1})}(t^l) = l - i$ *dès que* $\binom{l}{i} \neq 0$.

Démonstration. Tout d'abord,

$$e^{x\partial}(t^l) = e^{x\partial}(t)^l = \left(t + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x^{p^{s_i}}\right)^l = \sum_{i_0+\ldots+i_r = l,\, i_0,\ldots,i_r \geq 0} \binom{l}{i_0 \ldots i_r} t^{i_0} \prod_{\alpha=1}^{r} (\lambda_\alpha x^{p^{s_\alpha}})^{i_\alpha}.$$

En considérant le terme de degré ip^{s_1} en x de la somme ci-dessus, nous sommes amenés à étudier les conditions suivantes :

$$(5.2) \qquad ip^{s_1} = i_1 p^{s_1} + \ldots + i_r p^{s_r} \text{ et } i_0 + i_1 + \ldots + i_r = l$$

où $(i_0, i_1, \ldots, i_r) \in \mathbb{N}^r$. Notons qu'une liste $(i_0, i_1, \ldots, i_r)$ satisfaisant (5.2) existe puisque $l \geq ip^{s_1}$; en effet, nous pouvons prendre

$$(i_0, i_1, \ldots, i_r) = (l - i, i, 0, \ldots, 0).$$

Montrons que c'est l'unique choix pour $i_0 \in \mathbb{N}$ minimal. Soit $(\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_r) \in \mathbb{N}^r$ un $r+1$-uplet satisfaisant la propriété (5.2) avec $\gamma_0 \in \mathbb{N}$ minimal. Alors nous avons

$$l - i = l - \sum_{\alpha=1}^{r} \gamma_\alpha p^{s_\alpha - s_1} \leq l - \sum_{\alpha=1} \gamma_\alpha = \gamma_0.$$

D'où par minimalité, $\gamma_0 = l - i$, de sorte que $i = \sum_{\alpha=1}^{r} \gamma_\alpha$. Ainsi,

$$\left(\sum_{\gamma_\alpha}^{r} \gamma_\alpha \right) p^{s_1} = \sum_{\alpha=1}^{r} \gamma_\alpha p^{s_\alpha}.$$

Nous obtenons $(\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_r) = (l - i, i, 0, \ldots, 0)$. Cela implique en particulier que $\partial^{(ip^{s_1})} = \lambda_1^i \binom{l}{i} t^{l-i}$, comme demandé. □

Dans le prochain corollaire, nous utilisons les notations du lemme 5.3.13.

Corollaire 5.3.14. *Supposons que la caractéristique du corps* $\mathbf{k}$ *est un nombre premier* p. *Étendons la fonction* ord *et la* LFIHD ∂ *en un système itéré de dérivations d'ordre supérieur sur l'algèbre* $\mathbf{k}[t, t^{-1}]$ *des polynômes de Laurent. Fixons* $i \in \mathbb{N}$. *Pour tout* $l \geq ip^{s_1}$, *on a*

$$\partial^{(ip^{s_1})}(t^{-l}) = (-\lambda_1)^i \binom{l}{i} t^{-l-i}.$$

Par conséquent, dans cette situation, $\operatorname{ord} \partial^{(ip^{s_1})}(t^l) = -l - i$ *dès que* $\binom{l}{i} \neq 0$.

Démonstration. Considérons l'assertion suivante $\mathscr{A}_i$: Pour tout $l \in \mathbb{N}$ tel que $l \geq ip^{s_1}$, on a $\partial^{(ip^{s_1})}(t^{-l}) = (-\lambda_1)^i \binom{l}{i} t^{-l-i}$. Montrons par récurrence que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\mathscr{A}_i$ est vraie. Évidemment, l'assertion $\mathscr{A}_0$ est vraie. En fixant $i \in \mathbb{Z}_{>0}$, nous pouvons supposer que pour tout entier naturel $j < i$, $\mathscr{A}_j$ est vraie. Alors pour tout $l \geq ip^{s_1}$,

$$0 = \partial^{(ip^{s_1})}(t^l \cdot t^{-l}) = \sum_{i_1 + i_2 = i, i_1, i_2 \in \mathbb{N}} \partial^{(i_1 p^{s_1})}(t^l) \cdot \partial^{(i_2 p^{s_1})}(t^{-l}),$$

puisque pour tout $s \in \mathbb{N} - \mathbb{Z}p^{s_1}$, l'application $\partial^{(s)}$ est identiquement nulle. En utilisant le lemme 5.3.13, nous avons

$$0 = \sum_{i_1+i_2=i, i_1, i_2 \in \mathbb{N}} \lambda_1^{i_1} \binom{l}{i_1} t^{l-i_1} \partial^{(i_2 p^{s_1})}(t^{-l}).$$

Donc par l'hypothèse de récurrence, il s'ensuit que

$$\partial^{(ip^{s_1})} = -\lambda_1^i \left(\sum_{i_1+i_2=i, i_1 \geq 1, i_2 \geq 0} \binom{l}{i_1} \binom{l}{i_2} (-1)^{i_2} \right) t^{-l-i}.$$

En utilisant la règle de produit I dans [JKS, §2] pour $z = (-1) \cdot 1$, on obtient

$$\partial^{(ip^{s_1})}(t^{-l}) = -\lambda_1^i \left(\binom{l}{i} (-1)^{i-1} \right) t^{-l-i} = (-\lambda_1)^i \binom{l}{i} t^{-l-i}.$$

Cela donne l'assertion $\mathscr{A}_i$ et termine la démonstration du corollaire. □

5.4 Opérations du groupe additif dans les variétés toriques affines

Soit $\mathbf{k}$ un corps. Dans cette section, nous donnons une description combinatoire des variétés toriques affines munies d'une opération normalisée du groupe additif à Frobenius près. Pour un cône polyédral $\sigma \subset N_{\mathbb{Q}}$, nous désignons par $\sigma(1)$, l'ensemble de ses arêtes. Comme d'habitude, une arête de σ et son vecteur primitif correspondant sont écrits par une même lettre ρ. Le point suivant est une définition classique, voir par exemple [De, Section 4.5], [Li, 2.3], [AL, 1.5].

Définition 5.4.1. Soit $\sigma \subset N_{\mathbb{Q}}$ un cône polyédral saillant. Un vecteur $e \in M$ est une *racine de Demazure* (ou simplement *une racine)* si les conditions suivantes sont vraies.

(i) Il existe $\rho \in \sigma(1)$ tel que $\langle e, \rho \rangle = -1$.

(ii) Pour tout $\rho' \in \sigma(1) - \{\rho\}$, nous avons $\langle e, \rho' \rangle \geq 0$.

Le vecteur ρ satisfaisant $\langle e, \rho \rangle = -1$ est appelé le *rayon distingué* de la racine $e \in M$. Nous désignons par $\mathrm{Rt}\,\sigma$ l'ensemble des racines de Demazure du cône σ. D'après [Li, 2.5], tout élément de $\sigma(1)$ est le rayon distingué d'une racine de $\mathrm{Rt}\,\sigma$.

Mentionnons quelques développements autour de la théorie des racines de Demazure. Le lecteur peut consulter [De, Ni, Ba, AHHL] pour l'étude des automorphismes des $\mathbb{T}$-variétés complètes. Voir [Li 3, Ko] pour les racines des groupes de Cremona affines et le problème de surjectivité.

Puisque le sous-ensemble $\mathbf{k}[\mathbb{T}]^\star$ engendre l'algèbre $\mathbf{k}[\mathbb{T}]$, la proposition 5.3.4 (e) implique que $\mathbf{k}[\mathbb{T}]$ ne possède pas de LFIHD non triviale. Donc nous considérons uniquement des variétés toriques affines de la forme $X_\sigma = \operatorname{Spec} \mathbf{k}[\sigma_M^\vee]$ données par un cône polyédral saillant non nul $\sigma \subset N_\mathbb{Q}$.

Exemple 5.4.2. Soit $e \in \operatorname{Rt} \sigma$ une racine. Considérons la dérivation homogène sur l'algèbre de monoïde $\mathbf{k}[\sigma_M^\vee]$ définie par

$$\partial_e(\chi^m) = \langle m, \rho \rangle \chi^{m+e},$$

où ρ est le rayon distingué de e. Alors ∂_e est localement nilpotente et donne une opération de $\mathbb{G}_a$ dans la variété X_σ comme suit. La LFIHD homogène est donnée par les applications [5]

$$\partial_e^{(i)}(\chi^m) = \binom{\langle m, \rho \rangle}{i} \chi^{m+ie}, \ i = 0, 1, 2, 3, \ldots,$$

où $m \in \sigma_M^\vee$. Son noyau est $\mathbf{k}[\rho^\star \cap M]$. Le sous-ensemble $\rho^\star \subset \sigma^\vee$ est la face duale de ρ. Supposons $\operatorname{car} \mathbf{k} = p > 0$. En partant de ∂_e et d'un entier $r \in \mathbb{N}$, nous pouvons également définir une LFIHD rationnellement homogène $\partial_{e,r}$ de degré e/p^r. Son application exponentielle est

$$e^{x\partial_{e,r}} = \sum_{i=0}^{\infty} \partial_e^{(i)} \, x^{ip^r}.$$

On vérifie aisément que $\ker \partial_{r,e} = \mathbf{k}[\rho^\star \cap M]$. De plus, pour tout $m \in \sigma_M^\vee$, nous obtenons

$$\deg_x e^{x\partial_{e,r}}(\chi^m) = p^r \langle m, \rho \rangle.$$

Dans la suite, nous désignons par A l'algèbre de monoïde $\mathbf{k}[\sigma_M^\vee]$, où $\sigma \subset N_\mathbb{Q}$ est un cône polyédral saillant non nul. Nous commençons par décrire le noyau et les vecteurs degré possibles d'une LFIHD homogène sur A.

Lemme 5.4.3. *Considérons une* LFIHD *homogène non triviale ∂ sur A. Alors les assertions suivantes sont vraies.*

5. Pour tous $r_1, r_2 \in \mathbb{N}$, nous posons $\binom{r_1}{r_2} = 0$ lorsque $r_1 < r_2$.

(i) *Il existe* $\rho \in \sigma(1)$ *tel que* $\ker \partial = \mathbf{k}[\rho^\star \cap M]$, *où* $\rho^\star \subset M_{\mathbb{Q}}$ *est la face duale de* ρ.

(ii) *Le degré* $e \in M$ *de la* LFIHD ∂ *est une racine de Demazure du cône* σ *et* ρ *est son rayon distingué.*

Démonstration. (i) Par le proposition 5.3.4 (a), nous avons $\ker \partial = \mathbf{k}[W \cap \sigma_M^\vee]$, pour un hyperplan $W \subset M_{\mathbb{Q}}$. Supposons que $W \cap \sigma^\vee$ n'est pas une face de $\sigma^\vee$. Alors W divise $\sigma^\vee$ en deux parties. Nous pouvons trouver $m \in \sigma_M^\vee$ tel que pour tout $r \in \mathbb{N}$, $m + re \notin W$. Puisque $\chi^m \notin \ker \partial$, il existe $r_0 \in \mathbb{Z}_{>0}$ satisfaisant $\partial^{(r_0)}(\chi^m) \neq 0$. D'où $\partial^{(r_0)}(\chi^m)$ est homogène de degré $m + r_0 e$. Par l'argument précédent,

$$\partial^{(r_1')} \circ \partial^{(r_0)}(\chi^m) \neq 0,$$

pour $r_1' \in \mathbb{Z}_{>0}$. En utilisant 5.3.1 (iv), on a $\partial^{(r_0+r_1')}(\chi^m) \neq 0$. Posons $r_1 = r_0 + r_1'$. En procédant par récurrence, nous pouvons construire une suite strictement croissante d'entiers $\{r_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ avec r_0 non nul vérifiant $\partial^{(r_j)}(\chi^m) \neq 0$, pour tout $j \in \mathbb{N}$. Cela contredit le fait que ∂ est une LFIHD. Ainsi $W \cap \sigma^\vee$ est une face de $\sigma^\vee$. Puisque $\ker \partial$ est une sous-algèbre de dimension $\dim A - 1$, nous arrivons au résultat souhaité.

(ii) Si $e \in \sigma_M^\vee$ alors par le même argument que ci-dessus, on obtient à nouveau une contradiction. Le reste de la démonstration suit de [Li, Lemma 2.4]. □

Dans le lemme suivant, nous donnons quelques propriétés des LFIHD homogènes sur A. Elles seront utiles pour notre résultat principal de classification (voir 5.4.5).

Lemme 5.4.4. *Soit* ∂ *une* LFIHD *homogène non triviale sur* A *de degré* e. *Pour tout* $m \in \sigma_M^\vee$ *et tout* $i \in \mathbb{N}$, *nous posons*

$$\partial^{(i)}(\chi^m) = c_i(m)\chi^{m+ie},$$

où $c_i(m) \in \mathbf{k}$. *Écrivons* $\ker \partial = \mathbf{k}[\rho^\star \cap M]$ *pour une arête* $\rho \in \sigma(1)$ (*voir* 5.4.3). *Alors la suite de fonctions* $\{c_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ *vérifie les énoncés suivants.*

(i) c_0 *est l'application constante* $m \mapsto 1$.

(ii) *Pour tous* $m, m' \in \sigma_M^\vee$, *nous avons*

$$c_i(m + m') = \sum_{j=0}^{i} c_{i-j}(m) \cdot c_j(m'). \tag{5.3}$$

(iii) *Étant donné* $m \in \sigma^\vee$, *il existe* $r \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* $i \geq r$, $c_i(m) = 0$.

(iv) *Pour tous $i, j \in \mathbb{N}$ et pour tout $m \in \sigma_M^\vee$, on a*

$$\binom{i+j}{i} c_{i+j}(m) = c_i(m + je) \cdot c_j(m).$$

(v) *Pour tout $m' \in \rho^\star \cap M$ et pour tout $m \in \sigma_M^\vee$, $c_i(m + m') = c_i(m)$.*

Démonstration. Les assertions (i), (ii), (iii), (iv) suivent de la définition d'une LFIHD. Montrons l'assertion (v). Puisque $\chi^{m'} \in \ker \partial$, pour tout $j \in \mathbb{Z}_{>0}$, nous avons $c_j(m') = 0$. En appliquant l'égalité (5.3), nous obtenons $c_i(m + m') = c_i(m)$. $\square$

Le prochain résultat donne une classification des opérations normalisées du groupe additif $\mathbb{G}_a$ dans X_σ. Voir le théorème 2.7 dans [Li] pour le cas où $\mathbf{k}$ est de caractéristique zéro.

Théorème 5.4.5. *Soit $\sigma \subset N_\mathbb{Q}$ un cône polyédral saillant non nul. Toute opération non triviale normalisée de $\mathbb{G}_a$ dans X_σ par l'opération de $\mathbb{T}$ est donnée par une* LFIHD *homogène de la forme $\lambda\partial_e$, où $e \in \mathrm{Rt}\,\sigma$ et $\lambda \in \mathbf{k}^\star$ (voir* 5.4.2).

Démonstration. Posons $A = \mathbf{k}[\sigma_M^\vee]$ et soit ∂ une LFIHD homogène non triviale de degré e. Par le lemme 5.4.3, il existe un rayon $\rho \in \sigma(1)$ tel que $\ker \partial = \mathbf{k}[\rho^\star \cap M]$. De plus, $e \in \mathrm{Rt}\,\sigma$ est une racine et ρ est son rayon distingué.

Montrons d'abord qu'il existe un vecteur $m \in \sigma_M^\vee$ tel que $\langle m, \rho\rangle = 1$. Étant donné $m' \in \sigma_M^\vee$ non contenu dans $\rho^\star$, nous avons $\langle m', \rho\rangle > 1$. Par [Li, Lemma 2.4], nous obtenons

$$m := m' + (\langle m', \rho\rangle - 1) \cdot e \in \sigma_M^\vee,$$

et donc $\langle m, \rho\rangle = 1$.

Pour la LFIHD ∂, considérons les mêmes notations que dans le lemme 5.4.4. Soit $B = \mathbf{k}[x]$ l'algèbre des polynômes à une variable x. En utilisant la base $(1, x, x^2, \ldots)$, nous définissons une suite d'opérateurs linéaires $\bar{\partial}$ sur l'espace vectoriel B de la façon suivante. Fixons un vecteur $m \in \sigma_M^\vee$ vérifiant $\langle m, \rho\rangle = 1$. Pour tous entiers naturels i, r, nous posons

$$\bar{\partial}^{(i)}(x^r) = c_i(rm)x^{r-i}.$$

Notons que $\bar{\partial}$ est bien définie. En effet, supposons que $i, r \in \mathbb{N}$ satisfont $i > r$. Nous avons

$$\partial^{(i)}(\chi^{rm}) = c_i(rm)\chi^{rm+ie} \in A \text{ et } \langle rm + ie, \rho\rangle = r - i < 0,$$

donnant $c_i(rm) = 0$. D'où pour $i > r$, on obtient $\bar{\partial}^{(i)}(x^r) = 0$.

Par les assertions (i), (ii), (iii), (iv), (v) du lemme 5.4.4, la suite d'opérateurs $\bar{\partial}$ est une LFIHD sur l'algèbre B. Par exemple, montrons que $\bar{\partial}$ vérifie 5.3.1 (iv). En considérant $i, j \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\bar{\partial}^{(i)} \circ \bar{\partial}^{(j)}(x^r) = \bar{\partial}^{(i)}(c_j(rm)x^{r-j}) = c_i((r-j)m) \cdot c_j(rm)x^{r-i-j}.$$

Puisque $e \in \operatorname{Rt} \sigma$ est une racine ayant ρ comme rayon distingué, il s'ensuit que

$$v := rm + je - (r-j)m = j(m+e) \in \rho^\star \cap M.$$

L'assertion (v) du lemme 5.4.4 implique

$$c_i((r-j)m) = c_i((r-j)m + v) = c_i(rm + je).$$

Par 5.4.4 (iv), on conclut que

$$\bar{\partial}^{(i)} \circ \bar{\partial}^{(j)}(x^r) = \binom{i+j}{i} c_{i+j}(rm)x^{r-i-j} = \binom{i+j}{i} \bar{\partial}^{(i+j)}(x^r).$$

Les conditions (i), (ii), (iii) de 5.3.1 pour la suite $\bar{\partial}$ suivent d'un calcul aisé.

Puisque $\bar{\partial}$ est homogène pour la graduation naturelle de B, par la proposition 5.3.4 (d), il existe $\lambda \in \mathbf{k}$ tel que chaque c_i vérifie

$$c_i(rm) = \binom{r}{i} \lambda^i,$$

pour tout $r \in \mathbb{N}$. Nous utilisons ici la convention $\lambda^0 = 1$ lorsque $\lambda = 0$. Soit $w \in \sigma_M^\vee$. Les éléments

$$w + \langle w, \rho \rangle e \text{ et } \langle w, \rho \rangle e + \langle w, \rho \rangle m$$

appartiennent à $\rho^\star \cap M$. Par le lemme 5.4.4 (v), cela implique que

$$c_i(w) = c_i\left(w + \langle w, \rho \rangle e + \langle w, \rho \rangle m\right) = c_i\left(\langle w, \rho \rangle m\right) = \binom{\langle w, \rho \rangle}{i} \lambda^i. \tag{5.4}$$

Puisque ∂ n'est pas triviale, $\lambda \in \mathbf{k}^\star$. En vertu de (5.4) la suite ∂ est donnée par la LFIHD $\lambda\partial_e$ (voir l'exemple 5.4.2). $\square$

Comme conséquence immédiate, nous obtenons une description de toutes les opérations normalisées du groupe additif à Frobenius près dans les variétés toriques affines. Ce résultat nous sera utile dans le but de classifier les $\mathbb{T}$-variétés affines horizontales de complexité 1.

Corollaire 5.4.6. *Pour toute* LFIHD *rationnellement homogène non triviale* ∂ *sur l'algèbre* A *et de degré* e/p^r*, il existe une racine* $e \in Rt\,\sigma$ *de rayon* ρ*, un entier* $r \in \mathbb{N}$*, et un scalaire* $\lambda \in \mathbf{k}^\star$ *satisfaisant l'énoncé suivant. L'application exponentielle de* ∂ *est donnée par*

$$e^{x\partial}(\chi^m) = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\langle m, \rho\rangle}{i} \lambda^i \, \chi^{m+ie} x^{ip^r},$$

où $m \in \sigma_M^\vee$*. Réciproquement, toute* LFIHD *rationnellement homogène sur* A *provient de cette manière.*

Dans le prochain corollaire, nous généralisons dans notre contexte des résultats de [Li, Section 2]. Concernant l'assertion (i), le lecteur peut consulter [Ku, Corollary 3.5] pour le cas classique.

Corollaire 5.4.7. *Soit* $\sigma \subset N_{\mathbb{Q}}$ *un cône polyédral saillant et posons* $A = \mathbf{k}[\sigma_M^\vee]$.

(i) *Pour toute opération normalisée de* $\mathbb{G}_a$ *à Frobenius près dans une variété torique affine, l'algèbre des invariants correspondante est de type fini sur* $\mathbf{k}$.

(ii) *Il existe un nombre fini de* LFIHD *homogènes sur* A *ayant des noyaux deux à deux distincts.*

Démonstration. L'assertion (i) est une conséquence directe de l'exemple 5.4.2, du lemme 5.4.3 et des arguments de démonstration de [AH, 4.1]. Pour l'assertion (ii), cela suit du fait que $\sigma(1)$ est un ensemble fini. $\square$

5.5 Opérations du groupe additif de type vertical

Soit $\mathbf{k}$ un corps. Dans cette section, nous classifions les opérations normalisées du groupe additif de type vertical dans une $\mathbb{T}$-variété affine $X = \operatorname{Spec} A$ de complexité 1 sur $\mathbf{k}$. Voir [Li 2] pour la complexité arbitraire lorsque le corps de base est algébriquement clos de caractéristique zéro. Pour cela, nous considérons $A = A[C, \mathfrak{D}]$, où C est une courbe régulière sur $\mathbf{k}$ et $\mathfrak{D} = \sum_{z\in C} \Delta_z \cdot z$ est un diviseur σ-polyédral propre. Dans la suite, pour tout $m \in \sigma_M^\vee$, nous posons

$$A_m = H^0(C, \mathcal{O}_C(\lfloor \mathfrak{D}(m) \rfloor)) \text{ et } K_0 = \mathbf{k}(C).$$

Le résultat suivant donne quelques propriétés des LFIHD homogènes sur l'algèbre M-graduée A.

Lemme 5.5.1. *Soit ∂ une* LFIHD *homogène non triviale sur A de degré e. Alors les assertions suivantes sont vraies.*

(i) *Si ∂ est de type vertical alors $e \notin \sigma^\vee$ et $\ker\partial = \bigoplus_{m\in\tau_M} A_m\chi^m$, pour une face τ de codimension* 1 *du cône $\sigma^\vee$. En particulier, l'algèbre* $\ker\partial$ *est de type fini sur* $\mathbf{k}$.

(ii) *Si A n'est pas elliptique alors ∂ est de type vertical si et seulement si $e \notin \sigma^\vee$.*

Démonstration. (i) Par le lemme 5.3.12, nous pouvons étendre ∂ en une LFIHD homogène sur l'algèbre de monoïde $K_0[\sigma_M^\vee]$. Par le lemme 5.4.3, nous avons $e \in \mathrm{Rt}\,\sigma$ et donc $e \notin \sigma^\vee$. Soit $\bar{\partial}$ l'extension de ∂ sur $K_0[\sigma_M^\vee]$. À nouveau par le lemme 5.4.3, nous obtenons $\ker\bar{\partial} = K_0[\tau_M]$, pour une face τ de codimension 1 de $\sigma^\vee$. Ainsi,

$$\ker\partial = A \cap \ker\bar{\partial} = \bigoplus_{m\in\tau_M} A_m\chi^m.$$

Par les arguments de démonstration de [AH, 4.1], l'algèbre $\ker\partial$ est de type fini sur $\mathbf{k}$.

(ii) Supposons que A n'est pas elliptique et étendons ∂ en un système itéré de dérivations d'ordre supérieur $\bar{\partial}$ sur la K_0-algèbre $K_0[M]$. Si $e \notin \sigma^\vee$ alors pour tout $i \in \mathbb{N}$, nous avons $\partial^{(i)}(A_0) = A_{ie} = \{0\}$. Puisque $K_0 = \mathrm{Frac}\,A_0$, on conclut que ∂ est de type vertical. $\square$

Comme remarqué dans [Li, 3.2], dans le cas elliptique, l'algèbre M-graduée A admet en général des LFIHD ∂ de type horizontal satisfaisant $\deg\partial \notin \sigma^\vee$. Dans la suite, nous introduisons des données combinatoires attachées à l'algèbre $A = A[C,\mathfrak{D}]$ dans le but de décrire toutes les opérations normalisées du groupe additif de type vertical dans $X = \mathrm{Spec}\,A$.

Notation 5.5.2. Soit $e \in \mathrm{Rt}\,\sigma$ une racine de Demazure de rayon distingué ρ. Alors nous considérons le diviseur de Weil rationnel

$$\mathfrak{D}(e) = \sum_{z\in C} \min_{v\in V(\Delta_z)} \langle e, v\rangle \cdot z.$$

On rappelle que $V(\Delta_z)$ est l'ensemble des sommets de Δ_z. Nous désignons par Φ_e le module $H^0(C, \mathcal{O}_C(\lfloor\mathfrak{D}(e)\rfloor))$ sur l'anneau A_0. De plus, si $\varphi \in \Phi_e$ est une section alors pour tout vecteur $m \in \sigma^\vee - \rho^\star$,

$$\mathrm{div}\,\varphi \geq -\mathfrak{D}(e) \geq \mathfrak{D}(m) - \mathfrak{D}(m+e).$$

Cette dernière inégalité nous sera utile pour le résultat suivant.

En partant des données combinatoires introduites ci-dessus, nous construisons une LFIHD homogène de type vertical de la façon suivante.

Lemme 5.5.3. *Considérons $e \in Rt\,\sigma$ une racine de Demazure de rayon distingué ρ et $\varphi \in \Phi_e$ une section. Notons $\bar{\partial} = \varphi\,\partial_e$, où ∂_e est la* LFIHD *correspondante à la racine e opérant par endomorphismes K_0-linéaires sur la K_0-algèbre $K_0[\sigma_M^\vee]$, voir l'exemple* 5.4.2. *Alors pour tout $i \in \mathbb{N}$,*

$$\bar{\partial}^{(i)}(A) \subset A.$$

Par conséquent, la suite

$$\partial = \partial_{e,\varphi} = \{\bar{\partial}^{(i)}_{|A}\}_{i\in\mathbb{N}}$$

définit une LFIHD *homogène de type vertical sur l'algèbre M-graduée A.*

Démonstration. Fixons un entier $i \in \mathbb{Z}_{>0}$ et soit $f \in A_m$ une section non nulle. Si $\bar{\partial}^{(i)}(f\chi^m) \neq 0$ alors $m \in \sigma_M^\vee - \rho_M^\star$ et on a

$$\operatorname{div}\bar{\partial}^{(i)}(f\chi^m)/\chi^{m+ie} + \lfloor\mathfrak{D}(m+ie)\rfloor = i\operatorname{div}\varphi + \operatorname{div} f + \lfloor\mathfrak{D}(m+ie)\rfloor$$

$$\geq i(\mathfrak{D}(m/i) - \mathfrak{D}(m/i+e)) - \lfloor\mathfrak{D}(m)\rfloor + \lfloor\mathfrak{D}(m+ie)\rfloor$$

$$\geq \{\mathfrak{D}(m)\} - \{\mathfrak{D}(m+ie)\}.$$

Puisque que les coefficients du diviseur de Weil rationnel $\{\mathfrak{D}(m)\} - \{\mathfrak{D}(m+ie)\}$ appartiennent à $]-1,1[$, nous avons

$$\operatorname{div}\bar{\partial}^{(i)}(f\chi^m)/\chi^{m+ie} + \lfloor\mathfrak{D}(m+ie)\rfloor \geq 0.$$

Cela montre que A est $\bar{\partial}$-stable. Le reste de la démonstration est facile et laissé au lecteur. □

Théorème 5.5.4. *Pour l'algèbre $A = A[C,\mathfrak{D}]$, les* LFIHD *homogènes de type vertical sur A sont de la forme $\partial_{e,\varphi} = \varphi\partial_e|_A$, où $e \in \mathrm{Rt}\,\sigma$ est une racine, $\varphi \in \Phi_e$ est une section non nulle et ρ est le rayon distingué de e (voir le lemme* 5.5.3 *pour des précisions sur les notations). Réciproquement, une racine $e \in \mathrm{Rt}\,\sigma$ et une section $\varphi \in \Phi_e$ donnent une* LFIHD *homogène de type vertical sur A.*

Démonstration. Soit ∂ une LFIHD homogène sur A. Par le lemme 5.3.12, ∂ s'étend en un système itéré de K_0-dérivations d'ordre supérieur localement fini $\bar{\partial}$ sur l'algèbre de monoïde $K_0[\sigma_M^\vee]$. Par le théorème 5.4.5, $\bar{\partial}$ est donnée par une racine $e \in \mathrm{Rt}\,\sigma$ comme dans l'exemple 5.4.2, pour $\varphi \in K_0^\star$.

Montrons que $\varphi \in \Phi_e$. Soit ρ le rayon distingué de e. Pour $z \in C$, considérons un vecteur $v_z \in V(\Delta_z)$, de sorte que

$$\mathfrak{D}(e) = \sum_{z \in C} \langle v_z, e\rangle \cdot z.$$

Pour tout $z \in C$, on pose

$$\omega_z = \{m \in \sigma^\vee \,|\, h_z(m) = \langle m, v_z\rangle\}.$$

Le sous-ensemble ω_z est un cône de dimension $n = \mathrm{rang}\, M$ (voir [AH, Section 1]). Soit $m_z \in \sigma_M^\vee - \rho_M^\star$ tel que $m_z, m_z + e \in \omega_z$, $\deg \mathfrak{D}(m_z) \geq g$ et $\langle m_z, \rho\rangle \notin p\mathbb{Z}$, où p est la caractéristique du corps $\mathbf{k}$ et g est le genre de la courbe C. Choisir un tel m_z est possible puisque ω_z est d'intérieur non vide, le diviseur polyédral $\mathfrak{D}$ est propre, et le vecteur ρ est primitif. D'après le théorème de Riemann-Roch, nous avons $A_{m_z} \neq \{0\}$. De plus, l'inclusion

$$\partial^{(1)}(A_{m_z}\chi^{m_z}) \subset A_{m_z+e}\chi^{m_z+e}$$

implique $\varphi A_{m_z} \subset A_{m_z+e}$. Par conséquent, pour tout $z \in C$,

$$\mathrm{div}\,\varphi \geq \mathfrak{D}(m_z) - \mathfrak{D}(m_z + e).$$

Le coefficient du diviseur $\mathfrak{D}(m_z) - \mathfrak{D}(m_z + e)$ au point $z \in C$ est $-\langle v_z, e\rangle$. Ainsi, $\mathrm{div}\,\varphi \geq -\mathfrak{D}(e)$ et $\varphi \in \Phi_e$, comme demandé. Le reste de la démonstration est donné par le lemme 5.5.3. $\square$

Par analogie avec le cas torique traité dans la section précédente (voir le corollaire 5.4.7), toute famille de LFIHD homogène de type vertical sur A ayant des noyaux deux à deux distincts forme un ensemble fini. Le prochain résultat donne un critère combinatoire pour que A admette une LFIHD homogène non triviale de type vertical.

Corollaire 5.5.5. *Posons $A = A[C, \mathfrak{D}]$ et fixons un rayon $\rho \subset \sigma$. Alors l'algèbre M-graduée A admet une* LFIHD *homogène de type vertical avec $e = \deg \partial$, pour une racine $e \in \mathrm{Rt}\,\sigma$ de rayon distingué ρ, si et seulement si, l'une des assertions suivantes est vraie.*

(i) *C est affine.*

(ii) *C est projective et $\rho \cap \deg \mathfrak{D} = \emptyset$.*

Démonstration. Si C est une courbe affine alors tout diviseur de Weil sur C admet une section globale non nulle et donc pour tout $e \in \mathrm{Rt}\,\sigma$, nous avons $\dim \Phi_e > 0$. Dans ce cas, on conclut par le théorème 5.5.4.

Supposons que C est projective. Fixons une racine $e \in \mathrm{Rt}\,\sigma$ avec rayon distingué ρ. Notons que pour tout $m \in \rho_M^\star$, on a $e + m \in \mathrm{Rt}\,\sigma$. De plus,

$$\mathfrak{D}(e+m) \geq \mathfrak{D}(m) + \mathfrak{D}(e) \text{ et donc } \deg \mathfrak{D}(m+e) \geq \deg \mathfrak{D}(m) + \deg \mathfrak{D}(e).$$

D'où par le théorème de Riemann-Roch et par la propreté de $\mathfrak{D}$, si $\rho \cap \deg \mathfrak{D} = \emptyset$ alors il existe $m \in \rho_M^\star$ tel que $\dim \Phi_{e+m} > 0$.

Réciproquement, supposons que $\rho \cap \deg \mathfrak{D} \neq \emptyset$. Puisque $\langle e, \rho \rangle = -1$, il existe un vecteur $v \in \deg \mathfrak{D}$ tel que $\langle e, v \rangle < 0$ et par conséquent, $\deg \mathfrak{D}(e) < 0$. Sous ces dernières conditions, il vient $\dim \Phi_e = 0$. À nouveau on conclut par le théorème 5.5.4 pour le cas où la courbe C est projective. $\square$

5.6 Opérations du groupe additif de type horizontal

Soit $\mathbf{k}$ un corps. Le but de cette section est de classifier toutes les $\mathbb{T}$-variétés affines horizontales de complexité 1 sur un corps parfait en terme de diviseurs polyédraux (voir la terminologie de 5.3.11). Le lecteur peut consulter [Li, Section 3.2] pour le cas classique où le corps de base est algébriquement clos de caractéristique zéro. Donnons quelques notations que nous utiliserons par la suite. Soit C une courbe régulière sur $\mathbf{k}$. Fixons un cône polyédral saillant $\sigma \subset N_\mathbb{Q}$ et posons $A = A[C, \mathfrak{D}]$, où $\mathfrak{D}$ est un diviseur σ-polyédral propre sur C. Nous considérons également

$$A_m = H^0(C, \mathcal{O}_C(\lfloor \mathfrak{D}(m) \rfloor)), \text{ de sorte que } A = \bigoplus_{m \in \sigma_M^\vee} A_m \chi^m.$$

Pour simplifier, nous notons h_z la fonction de support du coefficient Δ_z de $\mathfrak{D}$ au point $z \in C$. Rappelons qu'un *quasi-éventail* de $\sigma^\vee$ est un ensemble Λ de cônes polyédraux de $M_\mathbb{Q}$ satisfaisant les propriétés suivantes.

(i) La réunion $\bigcup_{\delta \in \Lambda} \delta$ est égale à $\sigma^\vee$.

(ii) Si $\delta \in \Lambda$ et si δ' est une face de δ alors $\delta' \in \Lambda$.

(iii) Si $\delta, \delta' \in \Lambda$ alors $\delta \cap \delta'$ est une face commune de δ et de δ'.

Un quasi-éventail ne comportant que des cônes polyédraux saillants est appelé un *éventail.* On désigne par $\Lambda(\mathfrak{D})$ le quasi-éventail formant la subdivision la moins fine de $\sigma^\vee$ où $\mathfrak{D}$ est linéaire sur chacun de ses cônes (voir [AH, Section 1], [Li, 1.3]). Pour un ouvert non vide $C_0 \subset C$, nous notons

$$\mathfrak{D}|_{C_0} = \sum_{z \in C_0} \Delta_z \cdot z,$$

la *restriction* de $\mathfrak{D}$ à C_0.

Dans la suite, de nombreux résultats de cette section demandent l'hypothèse de perfection sur le corps de base $\mathbf{k}$*. Lorsque que cette hypothèse n'est pas mentionnée cela veux dire que l'on suppose* $\mathbf{k}$ *arbitraire.*

D'après un résultat de Rosenlicht [Ro], dans le cas où $\mathbf{k}$ est algébriquement clos, le lemme suivant montre en particulier que les $\mathbb{T}$-variétés affines horizontales de complexité 1 ont une orbite ouverte sous l'opération naturelle du groupe algébrique $\mathbb{T} \ltimes \mathbb{G}_a$.

Lemme 5.6.1. *Supposons que A admet une* LFIHD *homogène ∂ de type horizontal. Alors pour l'opération correspondante de $\mathbb{G}_a$ dans la variété $X = \operatorname{Spec} A$, nous avons l'égalité*

$$\mathbf{k}(X)^{\mathbb{G}_a} \cap \mathbf{k}(X)^{\mathbb{T}} = \mathbf{k}.$$

Démonstration. Posons $\Omega = \mathbf{k}(X)^{\mathbb{G}_a} \cap \mathbf{k}(X)^{\mathbb{T}}$. Supposons que l'extension $\mathbf{k}(X)^{\mathbb{T}}/\Omega$ est algébrique et considérons une fonction rationnelle invariante non nulle $F \in \mathbf{k}(X)^{\mathbb{T}}$. En remarquant que $\mathbf{k}(X)^{\mathbb{G}_a}$ est le corps des fractions de l'anneau $\ker \partial$, nous pouvons trouver $a \in \ker \partial$ tel que aF est entier sur $\ker \partial$. Puisque l'algèbre A est normale, $aF \in A$. Par la proposition 5.3.4(b), nous avons $aF \in \ker \partial$. D'où $\Omega = \mathbf{k}(X)^{\mathbb{T}}$, contredisant le fait que ∂ est de type horizontal. Notons que $\mathbf{k}(X)^{\mathbb{T}}$ a un degré de transcendance égal à 1 sur $\mathbf{k}$. Ainsi, en utilisant le fait que $\mathbf{k}$ est algébriquement clos dans Ω, nous obtenons $\Omega = \mathbf{k}$. □

Ensuite, nous montrons que l'existence d'une LFIHD sur l'algèbre $A = A[C, \mathfrak{D}]$ impose de fortes contraintes sur la courbe C. Nous renvoyons le lecteur à [FZ 2, 3.5], [Li, 3.16] pour le cas classique. Notons que dans le cas où le corps de base est de caractéristique zéro, l'assertion (i) ci-après peut être obtenue à partir des résultats de [Ku].

Lemme 5.6.2. *Supposons que A admet une* LFIHD *∂ homogène de type horizontal. Considérons ω (resp. L) le cône (resp. sous-réseau) engendré par l'ensemble des poids de* $\ker \partial$ *et posons $\omega_L = \omega \cap L$. Alors les assertions suivantes sont vraies.*

(i) *Le noyau de ∂ est une algèbre de monoïde, i.e.,*

$$\ker \partial = \bigoplus_{m \in \omega_L} \mathbf{k}\varphi_m \chi^m,$$

où $\varphi_m \in \mathbf{k}(C)^\star$.

(ii) *Nous avons $C \simeq \mathbb{P}^1_{\mathbf{k}}$, dans le cas où A est elliptique.*

(iii) *Si $\mathbf{k}$ est un corps parfait alors $C \simeq \mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}$ dans le cas où A n'est pas elliptique.*

Démonstration. (i) Soient $a, a' \in \ker \partial$ des éléments homogènes de même degré. Par le lemme 5.6.1, on a

$$a/a' \in \mathbf{k}(X)^{\mathbb{G}_a} \cap \mathbf{k}(X)^{\mathbb{T}} = \mathbf{k}^\star.$$

Ainsi $\ker \partial$ est une algèbre de monoïde avec ensemble des poids ω_L (voir 5.3.4(b)).

(ii) Posons $K = \operatorname{Frac} A$ et considérons le sous-corps $E = K^{\mathbb{G}_a}$. Par [CM, Lemma 2.2], il existe une variable x sur le corps E telle que $E(x) = K$. Par l'assertion (i) dans 5.6.2, l'extension $E/\mathbf{k}$ est transcendante pure et donc $K/\mathbf{k}$ l'est également. Puisque $\mathbf{k}(C) \subset K$, la courbe projective régulière C est unirationnelle. D'après le théorème de Luröth, il s'ensuit que $C \simeq \mathbb{P}^1_{\mathbf{k}}$.

(iii) Supposons que A n'est pas elliptique. Notons que par notre convention, $\mathbf{k}$ est algébriquement clos dans $\operatorname{Frac} A$. Soit $\bar{\mathbf{k}}$ une clôture algébrique de $\mathbf{k}$, de sorte que l'extension de corps $\bar{\mathbf{k}}/\mathbf{k}$ est séparable. Soit B la normalisation de l'algèbre intègre $A \otimes_{\mathbf{k}} \bar{\mathbf{k}}$. Alors B est une algèbre M-graduée de type fini sur $\bar{\mathbf{k}}$. L'hypothèse de perfection sur $\mathbf{k}$ implique que C est lisse. Donc la pièce graduée B_0 de B est égale à $\mathbf{k}[C] \otimes \bar{\mathbf{k}}$ (voir [Ha, III.10.1.(b)]). De plus, ∂ s'étend en une LFIHD homogène de type horizontal sur l'algèbre B. En adaptant dans notre contexte les arguments de démonstration de [Li, 3.16], nous avons $B \simeq \bar{\mathbf{k}}[t]$, pour une variable t sur $\bar{\mathbf{k}}$. Par séparabilité de $\bar{\mathbf{k}}/\mathbf{k}$, cela donne $A_0 \simeq \mathbf{k}[t]$ (voir par exemple [Ru, As]). □

5.6.3. D'après les résultats précédents, nous considérons seulement les cas où $C = \mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}$, lorsque A n'est pas elliptique, et $C = \mathbb{P}^1_{\mathbf{k}}$, lorsque A est elliptique. Supposons que A a une LFIHD ∂ homogène de type horizontal et considérons

$$\ker \partial = \bigoplus_{m \in \omega_L} \varphi_m \chi^m$$

le noyau de ∂ comme dans 5.6.2. Pour simplifier, nous pouvons supposer que $\mathbf{k}(C) = \mathbf{k}(t)$ pour un paramètre local t ; lorsque C est affine, nous prenons t tel que $\mathbf{k}[C] = \mathbf{k}[t]$.

Lemme 5.6.4. *Gardons les mêmes notations que dans* 5.6.3. *Les assertions suivantes sont vraies.*

(i) *Si* $C = \mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}$ *alors pour tout* $m \in \omega_L$, *on a* $\operatorname{div} \varphi_m + \mathfrak{D}(m) = 0$.

(ii) *Supposons que* $C = \mathbb{P}^1_{\mathbf{k}}$. *Alors il existe* $z_\infty \in C$ *tel que pour tout* $m \in \omega_L$, *le diviseur rationnel effectif*

$$\operatorname{div} \varphi_m + \mathfrak{D}(m)$$

a au plus z_∞ *dans son support*[6].

(iii) *Le cône* ω *est un cône maximal du quasi-éventail* $\Lambda(\mathfrak{D})$ *dans le cas non elliptique, et de* $\Lambda(\mathfrak{D}_{|\mathbb{P}^1_{\mathbf{k}} - \{z_\infty\}})$ *dans le cas elliptique.*

(iv) *Le rang du réseau* L *est égal à celui de* M. *Le réseau* M *est engendré par* $e := \deg \partial$ *et* L. *De plus, si* d *est le plus petit entier strictement positif tel que* $de \in L$ *alors nous pouvons écrire de façon unique tout vecteur* $m \in M$ *comme* $m = l + re$, *pour* $l \in L$ *et* $r \in \mathbb{Z}$ *tel que* $0 \leq r < d$.

(v) *Si* $\mathbf{k}$ *est un corps parfait alors le point* z_∞ *de l'assertion* 5.6.4 (ii) *est rationnel ; en d'autres termes, le corps résiduel du point* z_∞ *est* $\mathbf{k}$.

Démonstration. (i) Étant donné un vecteur $m \in \sigma^\vee_M$, nous posons

$$A_m = f_m \cdot \mathbf{k}[t]\,,$$

où $f_m \in \mathbf{k}(t)^\star$. Supposons que $m \in \omega_L$. Alors nous avons $\varphi_m = F f_m$, pour un élément non nul $F \in \mathbf{k}[t]$. Par la proposition 5.3.4(a), le polynôme F est constant et

$$\operatorname{div} \varphi_m + \lfloor \mathfrak{D}(m) \rfloor = 0.$$

Par conséquent, pour tout $r \in \mathbb{N}$,

$$r\lfloor \mathfrak{D}(m) \rfloor = -r\operatorname{div} \varphi_m = -\operatorname{div} \varphi_{rm} = \lfloor \mathfrak{D}(rm) \rfloor.$$

Cela montre que $\mathfrak{D}(m)$ est entier sous la condition $m \in \omega_L$. L'assertion (i) suit aisément.

(ii) Supposons qu'il existe $m \in \omega_L$ tel que

$$\operatorname{div} \varphi_m + \mathfrak{D}(m) \geq [z_\infty] + [\,z_0\,],$$

6. En particulier, si $m \in \omega_L$ est dans l'intérieur relatif de $\sigma^\vee$ et si $\mathfrak{D}(m)$ est entier alors par propreté de $\mathfrak{D}$, le singleton $\{z_\infty\}$ est le support de $\operatorname{div} \varphi_m + \mathfrak{D}(m)$.

où z_0, z_∞ sont des points distincts de C. Pour le paramètre local t, désignons par ∞ le point à l'infini de $C = \mathbb{P}^1_{\mathbf{k}}$. Considérons $p_0(t), p_\infty(t) \in \mathbf{k}(t)$ deux fonctions rationnelles vérifiant les conditions suivantes. Si le point z_0 (resp. z_∞) appartient à $\mathbb{A}^1_{\mathbf{k}} = \operatorname{Spec} \mathbf{k}[t]$ alors $p_0(t)$ (resp. $p_\infty(t)$) est le polynôme unitaire générateur de l'idéal associé à z_0 (resp. z_∞) dans $\mathbf{k}[t]$. Sinon $z_0 = \infty$ (resp. $z_\infty = \infty$) et nous posons $p_0(t) = 1/t$ (resp. $p_\infty(t) = 1/t$).

Considérons la fonction rationnelle $f := p_0(t)/p_\infty(t)$. Alors f et f^{-1} ne sont pas constantes et $f\varphi_m, f^{-1}\varphi_m$ appartiennent à A_m. Par la proposition 5.3.4(a), on a

$$f\varphi_m\chi^m \cdot f^{-1}\varphi_m\chi^m = \varphi_{2m}\chi^{2m} \in \ker \partial \Rightarrow f\varphi_m\chi^m, f^{-1}\varphi_m\chi^m \in \ker \partial,$$

donnant une contradiction avec 5.6.2 (i). On conclut que $\operatorname{div} \varphi_m + \mathfrak{D}(m)$ est supporté par au plus un point.

(iii) Par les assertions (i) et (ii) du lemme 5.6.4, l'application $m \mapsto \mathfrak{D}(m)$ dans le cas non elliptique, et l'application $m \mapsto \mathfrak{D}_{|\mathbb{P}^1_{\mathbf{k}} - \{z_\infty\}}(m)$ dans le cas elliptique, sont linéaires sur le cône ω. Cela implique qu'il existe un cône maximal ω_0 appartenant à $\Lambda(\mathfrak{D})$ dans le cas non elliptique, et appartenant à $\Lambda(\mathfrak{D}_{|\mathbb{P}^1_{\mathbf{k}} - \{z_\infty\}})$ dans le cas elliptique, tel que $\omega \subset \omega_0$.

Montrons l'inclusion réciproque. Soit $m \in \omega_0$. En remplaçant m par un multiple entier, nous pouvons supposer que $m \in L$ et que le diviseur de Weil $\mathfrak{D}(m)$ est entier. D'après les assertions 5.6.2 (i) et 5.3.4 (c), le cône ω est d'intérieur non vide dans $M_\mathbb{Q}$. D'où $m + m' \in \omega_L$, pour un $m' \in \omega_L$. Considérons une section non nulle $f_m \in A_m$ telle que

$$\operatorname{div} f_m + \mathfrak{D}(m) = 0$$

dans le cas non elliptique, et telle que

$$\operatorname{div}_{|\mathbb{P}^1_{\mathbf{k}} - \{z_\infty\}} f_m + \mathfrak{D}_{|\mathbb{P}^1_{\mathbf{k}} - \{z_\infty\}}(m) = 0$$

dans le cas elliptique. La linéarité de $\mathfrak{D}$ ou de $\mathfrak{D}_{|\mathbb{P}^1_{\mathbf{k}} - \{z_\infty\}}$ sur le cône ω_0, selon les cas elliptique et non elliptique, donne

$$f_m\chi^m \cdot \varphi_{m'}\chi^{m'} = \lambda\varphi_{m+m'}\chi^{m+m'},$$

pour un $\lambda \in \mathbf{k}^\star$. Par conséquent, $f_m\chi^m \in \ker \partial$ et à nouveau par 5.3.4 (a), nous avons $m \in \omega$. Cela montre l'égalité $\omega_0 = \omega$.

(iv) Puisque la partie $\sigma_M^\vee$ engendre le réseau M et que ∂ est une LFIHD homogène sur A, pour tout $m \in M$, nous avons $m + se \in L$, pour $s \in \mathbb{Z}$. En remplaçant $r := -s$ par le reste de la division euclidienne de r par d, si nécessaire, nous obtenons $m = l + re$, où $l \in L$ et $0 \leq r < d$. La minimalité de d implique que cette dernière décomposition est unique.

(v) Supposons que le corps $\mathbf{k}$ est parfait et fixons $\bar{\mathbf{k}}$ une clôture algébrique de $\mathbf{k}$. Considérons l'algèbre $B = A \otimes_{\mathbf{k}} \bar{\mathbf{k}}$. Si nous posons $\mathfrak{D} = \sum_{z \in C} \Delta_z \cdot z$ alors par la proposition 4.5.10, le diviseur polyédral

$$\mathfrak{D}_{\bar{\mathbf{k}}} = \sum_{z \in C} \Delta_z \cdot S^\star z$$

sur $\mathbb{P}^1_{\bar{\mathbf{k}}}$ vérifie

$$B = \bigoplus_{m \in \sigma_M^\vee} B_m \chi^m, \text{ avec } B_m = H^0(\mathbb{P}^1_{\bar{\mathbf{k}}}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_{\bar{\mathbf{k}}}}(\lfloor \mathfrak{D}_{\bar{\mathbf{k}}}(m) \rfloor)).$$

Nous pouvons étendre ∂ en une LFIHD homogène $\partial_{\bar{\mathbf{k}}}$ de type horizontal sur B. Pour tout $m \in \omega_L$, nous avons $\varphi_m \chi^m \in \ker \partial_{\bar{\mathbf{k}}}$ et il existe $\lambda_m \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ tel que

$$\operatorname{div} \varphi_m + \mathfrak{D}(m) = \lambda_m \cdot z_\infty.$$

En appliquant $S^\star$ à l'égalité d'avant, on a

$$\operatorname{div}_{\bar{\mathbf{k}}} \varphi_m + \mathfrak{D}_{\bar{\mathbf{k}}}(m) = \lambda_m \cdot S^\star z_\infty.$$

Supposons que z_∞ n'est pas un point rationnel et que $\lambda_m > 0$ pour un vecteur $m \in \omega_L$. En remplaçant m par un multiple entier, nous pouvons supposer que $\lambda_m > 1$. Utilisons les mêmes notations que dans la démonstration de 5.6.4 (ii). Puisque l'extension de corps $\bar{\mathbf{k}}/\mathbf{k}$ est séparable et que

$$\deg p(t) = \deg(z_\infty) > 1,$$

le polynôme $p_{z_\infty}(t)$ a au moins deux racines distinctes, disons $z_1, z_2 \in \bar{\mathbf{k}}$. Notons que les points z_1, z_2 appartiennent au support de $S^\star z_\infty$. En considérant la fonction rationnelle

$$f = (t - z_1)/(t - z_2),$$

nous avons la contradiction

$$f\varphi_m\chi^m \cdot f^{-1}\varphi_m\chi^m = \varphi_{2m}\chi^{2m} \in \ker \partial_{\bar{\mathbf{k}}} \Rightarrow f\varphi_m\chi^m, f^{-1}\varphi_m\chi^m \in \ker \partial_{\bar{\mathbf{k}}}.$$

Cela montre l'assertion (v). $\square$

Dans la suite, nous considérons les mêmes notations que dans 5.6.3. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que z_∞ est le point rationnel ∞ selon le paramètre local t.

Lemme 5.6.5. *Les assertions suivantes sont vraies.*

(i) *Si $C = \mathbb{P}^1_{\mathbf{k}}$ alors la normalisation de la sous-algèbre $A[t] \subset \mathbf{k}(t)[M]$ est*

$$A' = A[\mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}, \mathfrak{D}_{|\mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}}],$$

où $\mathbb{A}^1_{\mathbf{k}} = \operatorname{Spec} \mathbf{k}[t]$.

(ii) *Si le degré de ∂ appartient à ω et si la fonction évaluation du diviseur polyédral $\mathfrak{D}_{|\mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}}$ est linéaire alors ∂ s'étend en une* LFIHD *homogène ∂' sur A' de type horizontal. De plus,* $\ker \partial = \ker \partial'$.

(iii) *Soit d le plus petit entier strictement positif tel que pour tout $m \in \omega_M$ le diviseur $\mathfrak{D}(d \cdot m)$ est entier. Alors nous avons $d \cdot M \subset L$.*

Démonstration. (i) Cela suit de l'assertion (iii) du théorème 4.4.4 (voir aussi [La 2, 2.5]) en prenant un ensemble de générateurs homogènes de $A[t]$.

(ii) En posant

$$A' = \bigoplus_{m \in \sigma_M^\vee} A'_m \chi^m, \text{ avec } A'_m = H^0(\mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}}(\lfloor \mathfrak{D}_{|\mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}}(m) \rfloor)),$$

pour tout $m \in \sigma_M^\vee$, nous pouvons écrire $A'_m = \varphi_m \cdot \mathbf{k}[t]$, où φ_m est une fonction rationnelle non nulle satisfaisant

$$\operatorname{div} \varphi_m + \lfloor \mathfrak{D}_{|\mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}}(m) \rfloor = 0.$$

Si $m \in \omega_L$ alors, à la multiplication d'un scalaire non nul près, φ_m est le même que dans l'énoncé 5.6.4 (ii).

Par le lemme 5.3.5, nous pouvons étendre ∂ en un système itéré de dérivations d'ordre supérieur ∂' sur l'algèbre de monoïde $\mathbf{k}(t)[M]$. Désignons par $\partial'^{(i)}$ le i-ème terme de ∂'. Considérons $f \in A'_m$ pour $m \in \sigma_M^\vee$ et fixons un entier $i \in \mathbb{Z}_{>0}$. Montrons que

$$\partial'^{(i)}(f\chi^m) \in A'.$$

En utilisant l'assertion (ii) du lemme 5.6.4 et la propreté de $\mathfrak{D}$, nous pouvons trouver un vecteur $m' \in \omega_L$ vérifiant les conditions suivantes. Les vecteurs m, m' appartiennent à un même cône maximal de $\Lambda(\mathfrak{D})$ et le coefficient de $\operatorname{div}\varphi_{m'} + \mathfrak{D}(m')$ au point ∞ est entier, strictement positif, et strictement plus grand que $-\operatorname{div} f - \lfloor \mathfrak{D}(m) \rfloor$. Par conséquent,

$$\operatorname{div} f\varphi_{m'} + \lfloor \mathfrak{D}(m' + m) \rfloor = \operatorname{div} f + \lfloor \mathfrak{D}(m) \rfloor + \operatorname{div}\varphi_{m'} + \mathfrak{D}(m') \geq 0.$$

En particulier, $\varphi_{m'} f$ appartient à $A_{m+m'}$. D'où il s'ensuit que

$$\varphi_{m'}\chi^{m'}\partial'^{(i)}(f\chi^{m}) = \partial^{(i)}(\varphi_{m'} f\chi^{m'+m}) \in A_{m'+m+ie}\chi^{m'+m+ie}.$$

Par hypothèse, nous avons $e \in \omega = \sigma^{\vee}$, de sorte que $m + ie \in \sigma_M^{\vee}$. Puisque $\mathfrak{D}_{|\mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}}$ est linéaire et que $\mathfrak{D}(m')$ est entier, nous obtenons les égalités de diviseurs de Weil rationnels sur $\mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}$:

$$-\operatorname{div}\varphi_{m'+m+ie} = \lfloor \mathfrak{D}_{|\mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}}(m' + m + ie) \rfloor = \lfloor \mathfrak{D}_{|\mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}}(m') \rfloor + \lfloor \mathfrak{D}_{|\mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}}(m + ie) \rfloor.$$

Donc

$$\varphi_{m'+m+ie} = \lambda\varphi_{m'} \cdot \varphi_{m+ie},$$

pour $\lambda \in \mathbf{k}^{\star}$. Par conséquent, cela implique

$$\varphi_{m'}\chi^{m'}\partial'^{(i)}(f\chi^{m}) \in A_{m'+m+ie}\chi^{m'+m+ie} \subset \varphi_{m'} \cdot \varphi_{m+ie} \cdot \mathbf{k}[t]\,\chi^{m'+m+ie}.$$

En simplifiant par $\varphi_{m'}\chi^{m'}$, cela donne

$$\partial'^{(i)}(f\chi^{m}) \in \varphi_{m+ie} \cdot \mathbf{k}[t]\,\chi^{m+ie} = A'_{m+ie}\chi^{m+ie} \subset A'.$$

On conclut que la sous-algèbre A' est ∂'-stable.

Ensuite, nous montrons que ∂' est une LFIHD homogène sur A'. Par hypothèse sur le vecteur m', nous avons $t\varphi_{m'}\chi^{m'} \in A$. Ainsi, il existe $s \in \mathbb{Z}_{>0}$ tel que pour tout $i \geq s$,

$$\varphi_{m'}\chi^{m'}\partial'^{(i)}(t) = \partial^{(i)}(t\varphi_{m'}\chi^{m'}) = 0.$$

D'où ∂' opère de façon localement finie sur la variable t et donc également sur $A[t]$. Considérons $f \in A'_m$ et choisissons $s' \in \mathbb{Z}_{>0}$ tel que le faisceau

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_{\mathbf{k}}}(\lfloor \mathfrak{D}(m + s'm') \rfloor)$$

est globalement engendré. Ainsi,

$$\varphi_{s'm'} f\chi^{m+s'm'} \in A'_{m+s'm'} = \mathbf{k}[t] \otimes_{\mathbf{k}} A_{m+s'm'} \subset A[t].$$

Puisque $\varphi_{s'm'}\chi^{s'm'}$ est dans le noyau de ∂, on conclut que ∂' agit de façon localement finie sur $f\chi^m$. Cela montre que ∂' est une LFIHD. Le fait que ∂' est de type horizontal est facile et la démonstration est laissée au lecteur.

Il reste à montrer que $\ker\partial = \ker\partial'$. Par l'assertion 5.6.2 (i), le noyau $\ker\partial$ est une algèbre associée à un monoïde $\omega_{L'}$, où L' est un sous-réseau de rang maximal. Puisque $\ker\partial \subset \ker\partial'$, nous avons $L \subset L'$ et L'/L est un groupe abélien fini. Posons

$$\ker\partial = \bigoplus_{m\in\omega_L} \mathbf{k}\varphi_m\chi^m \text{ et } \ker\partial' = \bigoplus_{m\in\omega_{L'}} \mathbf{k}\varphi'_m\chi^m$$

comme dans le lemme 5.6.2. En considérant $m \in L'$, on a $rm \in L$ pour $r \in \mathbb{Z}_{>0}$ et en utilisant les assertions (i),(ii) du lemme 5.6.4, nous pouvons écrire

$$\lambda\varphi_{rm} = \varphi'_{rm} = (\varphi'_m)^r,$$

où $\lambda \in \mathbf{k}^\star$. Donc $\varphi'_m\chi^m$ est entier sur $\ker\partial$. Par normalité de A et puisque $\ker\partial$ est algébriquement clos dans A, on a $\varphi'_m\chi^m \in \ker\partial$. D'où $L' = L$ et donc $\ker\partial = \ker\partial'$.

(ii) En remplaçant chaque terme

$$\partial^{(i)} \quad \text{par} \quad \varphi_{im}\chi^{im}\partial^{(i)},$$

pour $m \in \omega_L$ et φ_m comme dans 5.6.3, nous pouvons supposer que $e \in \omega$. En particulier, l'algèbre

$$A_\omega = \bigoplus_{m\in\omega_M} A_m\chi^m$$

est ∂-stable. D'après les assertions précédentes (i), (ii) (nous l'appliquons au couple $(A_\omega, \partial_{|A_\omega})$), considérons seulement le cas où $C = \mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}$. Soit $m \in \omega_M$. Puisque pour tout $m' \in \omega_M$, on a

$$A_{dm+m'} = A_{dm} \cdot A_{m'} = \varphi_{dm}A_{m'},$$

l'idéal principal $(\varphi_{dm}\chi^{dm})$ dans l'anneau A_ω est $\partial_{|A_\omega}$-stable. Par la proposition 5.3.4 (f), on a $\varphi_{dm}\chi^{dm} \in \ker\partial$ et donc $dm \in \omega_L$. Ainsi, nous obtenons $d\cdot\omega_M \subset \omega_L$ et l'assertion (iii) suit. $\square$

Dans le résultat suivant, nous donnons une caractérisation géométrique des $\mathbb{G}_m$-surfaces affines horizontales non hyperboliques. Voir [FZ 3, 2.13] et [FZ 2, 3.3, 3.16] pour le cas où le corps de base est $\mathbb{C}$.

Corollaire 5.6.6. *Supposons que* $\mathbf{k}$ *est un corps parfait. Considérons le cas où* $N = \mathbb{Z}$ *et* $\sigma = \mathbb{Q}_{\geq 0}$; *de sorte que* $\mathfrak{D}$ *est uniquement déterminé par le diviseur de Weil rationnel* $\mathfrak{D}(1)$. *Si l'algèbre graduée* A *admet une* LFIHD *homogène de type horizontal alors les assertions suivantes sont vraies.*

(i) *Si* $C = \mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}$ *alors la partie fractionnaire* $\{\mathfrak{D}(1)\}$ *a au plus un point dans son support.*

(ii) *Si* $C = \mathbb{P}^1_{\mathbf{k}}$ *alors* $\{\mathfrak{D}(1)\}$ *a au plus deux points dans son support.*

Dans chacun des cas présentés ci-dessus, le support de $\{\mathfrak{D}(1)\}$ *ne contient que des points rationnels. En particulier, toute* $\mathbb{G}_m$*-surface affine horizontale non hyperbolique sur* $\mathbf{k}$ *est torique.*

Démonstration. (i) Tout d'abord, nous supposons que le corps de base $\mathbf{k}$ est algébriquement clos. Soit d le plus petit entier strictement positif tel que $\mathfrak{D}(d)$ est un diviseur entier. En prenant un générateur $f \in \mathbf{k}(t)$ du A_0 module A_d, i.e. $A_d = f \cdot A_0$, nous considérons B la fermeture intégrale de l'algèbre $A[\sqrt[d]{f}\chi]$ dans son corps des fractions. En ajoutant un diviseur principal à $\mathfrak{D}(1)$, si nécessaire, nous pouvons supposer que $f \in \mathbf{k}[t]$ est un polynôme. Par l'assertion (iii) du lemme 5.6.5, nous avons $f\chi^d \in \ker\partial$. D'où en utilisant le corollaire 5.3.6, on obtient l'existence d'une LFIHD ∂' sur B comme extension de ∂ et satisfaisant $\sqrt[d]{f}\chi \in \ker\partial'$. Écrivons $B = A[C', \mathfrak{D}']$ pour un diviseur polyédral propre $\mathfrak{D}'$ sur une courbe affine régulière $C' = \operatorname{Spec} B_0$. En fait, B_0 est la normalisation de $\mathbf{k}[t, \sqrt[d]{f}]$ et est aussi une algèbre de polynôme d'une variable sur $\mathbf{k}$, voir l'assertion (iii) du lemme 5.6.2. Le fait que $B_0^\star = \mathbf{k}^\star$ et que B_0 est un anneau factoriel implique que $f = (t - z)^r$, pour $z \in \mathbf{k}$ et pour $r \in \mathbb{Z}_{>0}$. Puisque $\operatorname{div} f + d \cdot \mathfrak{D}(1) = 0$, on conclut que le support de $\{\mathfrak{D}(1)\}$ contient au plus z.

Supposons que $\mathbf{k}$ n'est pas algébriquement clos et que le support de $\{\mathfrak{D}(1)\}$ contient au moins deux points. En calculant le diviseur polyédral de $A \otimes_{\mathbf{k}} \bar{\mathbf{k}}$, on obtient une contradiction avec l'étape précédente. Cela montre l'assertion (i).

(ii) En multipliant ∂ par un élément homogène de son noyau, nous pouvons supposer que le degré de ∂ est positif. En utilisant l'assertion 5.6.5 (ii), ∂ s'étend en une LFIHD homogène ∂' de type horizontal sur la normalisation A' de l'algèbre $A[t]$. Notons que l'algèbre graduée A' est donnée par le diviseur polyédral $\mathfrak{D}_{|\mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}}$. En appliquant l'assertion (i) ci-dessus, pour l'algèbre graduée parabolique A', la partie fractionnaire $\{\mathfrak{D}_{|\mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}}(1)\}$ a au plus un point dans son support. Donc le support de $\{\mathfrak{D}(1)\}$ a au plus deux points. Cela donne l'assertion (ii).

Par un argument analogue, on déduit que dans chaque cas le support de $\{\mathfrak{D}(1)\}$ ne contient que des points rationnels (voir la proposition 4.5.10).

Montrons la dernière affirmation. Supposons que A n'est pas elliptique. Puisque $\{\mathfrak{D}(1)\}$ a au plus un point dans son support (et cet éventuel point est rationnel), sans perte de généralité, nous pouvons supposer que

$$\mathfrak{D}(1) = -\frac{e}{d}\cdot 0, \text{ avec } 0 \le e < d \text{ et } \text{p.g.c.d.}(e,d) = 1.$$

Un calcul direct montre que

$$A = \bigoplus_{b\ge 0,\, ad-be\ge 0} \mathbf{k}\, t^a\chi^b,$$

voir par exemple [FZ, 2.4, 3.8] et [Li, 3.21]. L'algèbre A admet une $\mathbb{Z}^2$-graduation faisant de $X = \operatorname{Spec} A$ une surface torique. Supposons que A est elliptique. En utilisant le fait que tout diviseur entier sur $\mathbb{P}^1$ de degré 0 est principal, nous pouvons nous réduire au cas où $\mathfrak{D}$ est supporté par les points 0 et ∞. On conclut par un argument analogue à [Li, 3.21]. □

Comme conséquence du corollaire 5.6.6, nous obtenons le point suivant.

Corollaire 5.6.7. *Avec les hypothèses de* 5.6.3*, considérons* $A_\omega = \bigoplus_{m\in\omega_M} A_m\chi^m$ *et posons* $\tau = \omega^\vee$*. Alors* $A_\omega \simeq A[C,\mathfrak{D}_\omega]$*, comme algèbre* M*-graduée, où* $\mathfrak{D}_\omega$ *est un diviseur* τ*-polyédral propre sur la courbe* C *vérifiant les assertions suivantes.*

(i) *Si* A *n'est pas elliptique alors* $\mathfrak{D}_\omega = (v+\tau)\cdot 0$*, pour* $v \in N_\mathbb{Q}$*.*

(ii) *Si* A *est elliptique alors* $\mathfrak{D}_\omega = (v+\tau)\cdot 0 + \Delta'_\infty\cdot\infty$*, pour* $v \in N_\mathbb{Q}$ *et pour* $\Delta'_\infty \in \operatorname{Pol}_\tau(N_\mathbb{Q})$ *satisfaisant* $v + \Delta'_\infty \subsetneq \tau$*.*

Démonstration. (i) Nous allons suivre les idées de démonstration de [Li, 3.23]. Notons que le degré e de ∂ appartient à ω (voir 5.5.1 (ii)). Pour $l \in \omega_L$, désignons par ∂_l la LFIHD homogène où le i-ème terme est l'application linéaire $\varphi_l^i\partial^{(i)}$. La sous-algèbre

$$A_{(l+e)} = \bigoplus_{r\ge 0} A_{r(l+e)}\chi^{r(l+e)}$$

est ∂_l-stable. Puisque la LFIHD homogène $\partial_l|_{A_{(l+e)}}$ est de type horizontal, le corollaire 5.6.6 s'applique et $\{\mathfrak{D}(l+e)\}$ est supporté par au plus un point. Par l'assertion (i) du lemme 5.6.4, pour tous $l, l' \in \omega_L$,

$$-\operatorname{div}\varphi_{l'} + \mathfrak{D}(l+e) = \mathfrak{D}(l+l'+e) = \mathfrak{D}(l'+e) - \operatorname{div}\varphi_l$$

et donc $\{\mathfrak{D}(l+e)\} = \{\mathfrak{D}(l'+e)\}$. Ainsi, la réunion de tous les supports $\{\mathfrak{D}(l+e)\}$, où l parcourt ω_L, a au plus un point. Par linéarité de $\mathfrak{D}$ sur ω et l'assertion (iv) du lemme 5.6.4, après avoir ajouté un diviseur polyédral principal à $\mathfrak{D}$, le diviseur polyédral associé à A_ω a au plus un point dans son support. Cet éventuel point est rationnel. Cela donne l'assertion (i).

(ii) Tout d'abord, nous pouvons supposer que $e \in \omega$. Soit A'_ω la normalisation de $A_\omega[t]$. Par le lemme 5.6.5, un élément de degré $m \in \omega_M$ de A'_ω est la multiplication d'une section globale de $\lfloor \mathfrak{D}_{|\mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}}(m) \rfloor$ et d'un caractère χ^m, et réciproquement. De plus, ∂ s'étend en une LFIHD homogène de type horizontal sur A'_ω. Par les arguments ci-dessus, la réunion de tous les supports de $\{\mathfrak{D}_{|\mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}}(m)\}$, où m parcourt ω_M, a au plus un point. À nouveau, cet éventuel point est rationnel. Cela nous permet de conclure. $\square$

Le théorème suivant donne une première classification des opérations normalisées du groupe additif de type horizontal pour une classe de variétés toriques affines munies d'une opération de tore algébrique de complexité 1.

Théorème 5.6.8. *Soit $\mathfrak{D}$ un diviseur σ-polyédral propre sur une courbe régulière C. Supposons que $\mathfrak{D}$ vérifie une des conditions suivantes.*

(i) *Si C est affine alors $C = \mathbb{A}^1_{\mathbf{k}} = \operatorname{Spec} \mathbf{k}[t]$ et $\mathfrak{D} = (v + \sigma) \cdot 0$, pour $v \in N_{\mathbb{Q}}$.*

(ii) *Si C est projective alors $C = \mathbb{P}^1_{\mathbf{k}}$ et $\mathfrak{D} = (v + \sigma) \cdot 0 + \Delta_\infty \cdot \infty$, pour $v \in N_{\mathbb{Q}}$ et pour $\Delta_\infty \in \operatorname{Pol}_\sigma(N_{\mathbb{Q}})$.*

Soit d le plus petit entier strictement positif tel que $dv \in N$. Pour tout $m \in M$, posons $h(m) = \langle m, v \rangle$. Alors il existe une LFIHD *homogène ∂ de type horizontal sur $A = A[C, \mathfrak{D}]$ avec $\deg \partial = e$ si et seulement si un des énoncés est vrai.*

(a) *Si $\operatorname{car} \mathbf{k} = p > 0$ alors il existe une suite $0 \leq s_1 < s_2 < \ldots < s_r$ de nombres entiers telle que pour $i = 1, \ldots, r$ nous avons $-1/d - h(p^{s_i} e) \in \mathbb{Z}$.*

(b) *Si $\operatorname{car} \mathbf{k} = 0$ alors $-1/d - h(e) \in \mathbb{Z}$.*

Sous ces dernières conditions, la LFIHD *∂ est de la forme suivante. Posons $\zeta = \sqrt[d]{t}$. Fixons une* LFIHD *∂_ζ sur l'algèbre des polynômes $\mathbf{k}[\zeta]$ à une variable ζ dont l'application exponentielle est donnée par*

$$e^{x\partial_\zeta}(\zeta) = \zeta + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x^{p^{s_i}}, \tag{5.5}$$

où $\lambda_1, \ldots \lambda_r \in \mathbf{k}^\star$ (resp. avec $\partial_\zeta^{(1)} = \lambda \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}$, où $\lambda \in \mathbf{k}^\star$) lorsque $\operatorname{car} \mathbf{k} > 0$ (*resp.* $\operatorname{car} \mathbf{k} = 0$). *Alors le i-ème terme de ∂ est donné par l'égalité*

$$\partial^{(i)}(t^l \chi^m) = \zeta^{-dh(m+ie)} \partial_\zeta^{(i)}(\zeta^{dh(m)} t^l) \chi^{m+ie}, \tag{5.6}$$

où $t^l \chi^m \in A$.

Démonstration. Supposons que $\mathfrak{D}$ satisfait la condition (i) et fixons une LFIHD homogène ∂ de type horizontal sur l'algèbre A et de degré e. Soit B la normalisation de la sous-algèbre

$$A\left[\zeta^{-dh(e)}\chi^{e}\right] \subset \mathbf{k}(\zeta)[M].$$

En considérant la droite affine $C' = \operatorname{Spec}\mathbf{k}[\zeta]$ et le diviseur polyédral $\mathfrak{D}' = (dv+\sigma)\cdot 0$ sur C', l'algèbre $A[C', \mathfrak{D}']$ est précisément B (voir le théorème 4.4.4 ou [La 2, 2.5]). D'après l'assertion (ii) du lemme 5.5.1, nous avons $e \in \sigma^{\vee}$. Donc $A\left[\zeta^{-dh(e)}\chi^{e}\right]$ est une extension cyclique de l'anneau A. Puisque $\varphi_{de}\chi^{de} \in \ker \partial$, par le corollaire 5.3.6, ∂ s'étend en une LFIHD ∂' sur l'algèbre B. En utilisant de plus que $dv \in N$, nous obtenons un isomorphisme d'algèbres M-graduées

$$\varphi : B \to E,\ \ \zeta^{l}\chi^{m} \mapsto \zeta^{dh(m)+l}\chi^{m},$$

où $E = \mathbf{k}[\sigma_M^{\vee}][\zeta]$. Considérons $\varphi_{\star}\partial'$ la LFIHD homogène de type horizontal sur E définie par l'égalité

$$\varphi_{\star}\partial'^{(i)} = \varphi \circ \partial'^{(i)} \circ \varphi^{-1},$$

où $i \in \mathbb{N}$. L'assertion (iii) du lemme 5.6.5 implique que $\ker \varphi_{\star}\partial' = \mathbf{k}[\sigma_M^{\vee}]$. En posant $e = \deg \partial$, nous déduisons que $\varphi_{\star}\partial' = \chi^{e}\cdot\partial_{\zeta}$, pour une LFIHD non triviale ∂_{ζ} sur $\mathbf{k}[\zeta]$. Un calcul facile montre que $\partial = \varphi_{\star}^{-1}(\varphi_{\star}\partial')$ satisfait l'égalité (5.6).

Supposons que $\operatorname{car}\mathbf{k} = p > 0$ et montrons que la condition (a) est vraie pour le vecteur $e = \deg \partial$. Par la proposition 5.3.4 (d), l'application exponentielle de ∂_{ζ} est donnée comme dans (5.5) pour des entiers $0 \leq s_1 < \ldots < s_r$. Si p ne divise pas d alors considérons $l \in \mathbb{N} - p\mathbb{Z}$ tel que $dl \geq p^{s_1}$. Notons que $t^{l} \in A$. Par le lemme 5.3.13 et (5.6), nous obtenons l'égalité

$$\partial^{(p^{s_1})}(t^{l}) = \lambda_1 dl t^{-1/d - h(p^{s_1}e)+l}\chi^{p^{s_1}e}.$$

Puisque $\partial^{(p^{s_1})}(t^{l}) \in A - \{0\}$, il s'ensuit que $-1/d - h(p^{s_1}e) \in \mathbb{Z}$.

Supposons maintenant que p divise d. Par minimalité de d, il existe $m \in \sigma_M^{\vee}$ tel que $dh(m)$ n'est pas divisible par p. En prenant $l \in \mathbb{N}$ tel que $dl \geq \max(p^{s_1}, -dh(m))$, nous avons $t^{l}\chi^{m} \in A - \{0\}$ et donc le lemme 5.3.13 implique

$$\partial^{(p^{s_1})}(t^{l}\chi^{m}) = \lambda_1 dh(m) t^{-1/d - h(p^{s_1}e)+l}\chi^{m+p^{s_1}e} \in A - \{0\}.$$

D'où dans tous les cas $e_1 := (p^{s_1}e, -1/d - h(p^{s_1}e)) \in \hat{M}$, où $\hat{M} = M \times \mathbb{Z}$.

Remarquons que

$$A[C,\mathfrak{D}] = \bigoplus_{(m,l)\in\hat{\sigma}^\vee_{\hat{M}}} \mathbf{k}\,\chi^{(m,l)} = \mathbf{k}[\hat{\sigma}^\vee_{\hat{M}}],$$

où $\chi^{(m,l)} = t^l\chi^m$ et $\hat{\sigma}$ est le cône engendré par $(v,1)$ et $(\sigma,0)$. Un calcul facile montre que $e_1 = (p^{s_1}e, -1/d - h(p^{s_1}e)) \in \mathrm{Rt}\,\hat{\sigma}$, pour le rayon distingué $\rho = (dv,d)$. Donc par le corollaire 5.4.6, l'algèbre $\hat{M}$-graduée A admet des LFIHD rationnellement homogènes de degré e_1/p^{s_1} provenant de la racine e_1. Une d'entre elles est donnée par l'égalité

$$e^{x\partial_1}(t^l\chi^m) = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{d(l+h(m))}{i} \lambda_1^i t^{l-i(1/d+h(p^{s_1}e))}\chi^{m+ip^{s_1}e}x^{ip^{s_1}},$$

où $\lambda_1 \in \mathbf{k}^\star$ est le même que dans (5.5). De plus, par le corollaire 5.3.6, nous étendons ∂_1' en une LFIHD homogène, notée ∂_1', sur l'algèbre M-graduée B. Supposons que $r \geq 2$. On peut voir $e^{x\partial'}$ et $e^{x\partial_1'}$ comme des automorphismes de l'algèbre $B[x]$ en posant $e^{x\partial'}(x) = e^{x\partial_1}(x) = x$. D'où en utilisant cette convention, il vient

$$e^{x\partial'} \circ (e^{x\partial_1'})^{-1} = e^{x\varphi_\star^{-1}(\chi^e\partial_{\zeta,1})},$$

où $\partial_{\zeta,1}$ est la LFIHD sur $\mathbf{k}[\zeta]$ définie par

$$e^{x\partial_{\zeta,1}}(\zeta) = \zeta + \sum_{i=2}^{r} \lambda_i x^{p^{s_i}}.$$

Par conséquent, l'application $e^{x\partial'} \circ (e^{x\partial_1'})^{-1}$ donne une LFIHD homogène ∂_1'' sur A.

En fait, en remplaçant ∂_ζ par $\partial_{\zeta,1}$, la LFIHD ∂_1'' satisfait l'égalité (5.6). À nouveau, nous déduisons que $e_2 := (p^{s_2}e, -1/d - h(p^{s_2}e)) \in \hat{M}$ est une racine du cône $\hat{\sigma}$. On conclut que l'assertion (a) est vraie en raisonnant par récurrence.

Si $\mathrm{car}\,\mathbf{k} = 0$ alors la dérivation localement nilpotente $\partial_\zeta^{(1)}$ sur l'algèbre des polynômes $\mathbf{k}[\zeta]$ est $\lambda\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}$ pour un scalaire $\lambda \in \mathbf{k}^\star$. En utilisant (5.6), nous avons

$$\partial^{(1)}(t) = \lambda d t^{-1/d-h(e)+1}\chi^e \in A - \{0\}$$

et donc l'assertion (b) est vérifiée.

Montrons que l'assertion (a) ou (b) est vraie dans la situation où $\mathfrak{D}$ vérifie (ii) et A admet une LFIHD homogène de type horizontal avec $e = \deg\partial$. Supposons que la caractéristique du corps $\mathbf{k}$ est arbitraire. Soit A' la normalisation de $A[t]$ dans son corps des fractions $\mathrm{Frac}\,A$. En utilisant l'assertion (iii) du lemme 5.6.5, on a

$$d \cdot M = h^{-1}(\mathbb{Z}) \subset L,$$

où L est le sous-réseau de M engendré par les poids de $\ker\partial$. Donc en remplaçant ∂ par $\varphi_m\cdot\partial$, pour $m\in\sigma^\vee_{d\cdot M}$, nous pouvons supposer que $e\in\sigma^\vee$ (voir les notations de 5.6.3). Plus précisément, remplacer e par $e+m$, pour $m\in\sigma^\vee_{d\cdot M}$ ne change pas les assertions (a) et (b). Avec ces nouvelles hypothèses, à nouveau par le lemme 5.6.5, on peut étendre ∂ en une LFIHD homogène $\bar{\partial}$ de type horizontal sur l'algèbre A'. Par l'argument précédent (le cas où $C=\mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}$) appliqué au couple $(A',\bar{\partial})$, nous obtenons (a) si $\operatorname{car}\mathbf{k}>0$ et (b) sinon.

Il reste à montrer que si un vecteur entier e satisfait les conditions (a) et (b) alors nous pouvons construire une LFIHD homogène de type horizontal sur $A=A[C,\mathfrak{D}]$ et de degré e comme dans (5.6). Supposons que $\operatorname{car}\mathbf{k}>0$ et posons $e_i=(p^{s_i}e,-1/d-h(p^{s_i}e))$. Par l'assertion (a), nous avons $e_i\in\operatorname{Rt}\hat{\sigma}$ et nous pouvons considérer les LFIHD rationnellement homogènes $\partial_{e_1,s_1},\ldots,\partial_{e_r,s_r}$ sur l'algèbre de monoïde $\mathbf{k}[\hat{\sigma}^\vee_{\hat{M}}]$ (voir l'exemple 5.4.2). En utilisant l'isomorphisme φ et en considérant chaque $e^{x\partial_{e_i,s_i}}$ comme un automorphisme de l'anneau $A[x]$, un calcul montre que la composition

$$e^{x\partial_{e_1,s_1}}\circ e^{x\partial_{e_2,s_2}}\circ\ldots\circ e^{x\partial_{e_r,s_r}}$$

définit une LFIHD comme dans (5.6). Pour le cas de $\operatorname{car}\mathbf{k}=0$, nous utilisant un argument analogue (voir également [Li, 3.20, 3.21]). Cela termine la démonstration du théorème 5.6.8. $\square$

Dans l'assertion suivante, nous étudions comment change la présentation d'Altmann-Hausen après un revêtement cyclique.

Lemme 5.6.9. *Posons $A=A[C,\mathfrak{D}]$, où C est une courbe régulière sur $\mathbf{k}$ avec corps des fonctions rationnelles K_0 et $\mathfrak{D}=\sum_{z\in C}\Delta_z\cdot z$ est un diviseur σ-polyédral propre. Considérons la normalisation A' de l'extension cyclique $A[s\chi^e]$, où $e\in\sigma^\vee_M$, $s^d\in A_{de}$ et $d\in\mathbb{Z}_{>0}$. Supposons que $\mathbf{k}$ est algébriquement clos dans A'. Alors $A'=A[C',\mathfrak{D}']$ où C' et $\mathfrak{D}'$ sont définis par les points suivants.*

(i) *Le corps $K_0[s]$ est un corps de fonctions algébriques d'une variable sur $\mathbf{k}$. Si A est elliptique alors A' l'est aussi et C' est la courbe projective régulière sur $\mathbf{k}$ associée au corps de fonctions algébriques $K_0[s]$.*

(ii) *Si A n'est pas elliptique alors A' l'est aussi et $C'=\operatorname{Spec}A'_0$, où A'_0 est la normalisation de A_0 dans $K_0[s]$.*

(iii) *Dans tous les cas, $\mathfrak{D}'=\sum_{z\in C}\Delta_z\cdot\pi^\star(z)$, où $\pi:C'\to C$ est la projection naturelle.*

Démonstration. Notons $K=\operatorname{Frac}A$. Par définition, A' est la clôture intégrale de A dans $K[s\chi^e]=K[s]$. L'algèbre A' est M-graduée, normale, et de type fini sur $\mathbf{k}$ (voir le théorème 2 de [Bou, V3.2]). On a $K[s]^{\mathbb{T}} = K_0(s)$ de sorte que $X' = \operatorname{Spec} A'$ est une $\mathbb{T}$-variété de complexité un. Par ailleurs, l'inclusion $A[s\chi^e] \subset K_0(s)[\sigma_M^\vee]$ implique $A' \subset K_0(s)[\sigma_M^\vee]$ et $\sigma^\vee$ est le cône des poids de A'. Par hypothèse, $\mathbf{k}$ est algébriquement clos dans

$$\operatorname{Frac} A' = K[s] = \operatorname{Frac} K_0[s][M]$$

et donc par les théorèmes 4.4.4 (ii) et 4.5.6 (i), il existe une courbe régulière C' sur $\mathbf{k}$ et un unique diviseur σ-polyédral propre $\mathfrak{D}'$ sur C' tels que $A' = A[C', \mathfrak{D}']$, où C' vérifie (i) ou (ii).

Il reste à montrer (iii). Notons $\pi : C' \to C$ la projection [7] provenant de l'inclusion $\mathbf{k}(C) \subset \mathbf{k}(C')$. Ecrivons pour $z \in C$,

$$\pi^\star(z) = \sum_{z' \in C'} a_{z'} \cdot z' \ \text{ et } \ \mathfrak{D}' = \sum_{z' \in C'} \Delta'_{z'} \cdot z'.$$

Soient $f_1\chi^{m_1}, \ldots, f_r\chi^{m_r} \in A$ des éléments homogènes de degrés respectifs $m_1, \ldots, m_r$ tels que

$$A = \mathbf{k}[C][f_1\chi^{m_1}, \ldots, f_r\chi^{m_r}].$$

Alors A' est la normalisation de l'algèbre

$$\mathbf{k}[C'][\pi^\star(f_1)\chi^{m_1}, \ldots, \pi^\star(f_r)\chi^{m_r}, s\chi^e].$$

Par les théorèmes 4.4.4 (iii) et 4.5.6 (iii), pour tout $z' \in C'$ dans le support de $\pi^\star(z)$, on obtient

$$\Delta'_{z'} = \{v \in N_{\mathbb{Q}} \mid \langle m_i, v\rangle \geq -\operatorname{ord}_{z',C'}(\pi^\star(f_i)), i = 1, \ldots, r, \langle de, v\rangle \geq -\operatorname{ord}_{z',C'}(\pi^\star(s^d))\}.$$

Puisque pour tout $f \in \mathbf{k}(C)^\star$,

$$\operatorname{div}_{C'}(\pi^\star(f)) = \sum_{z \in C} \operatorname{ord}_{z,C} f \cdot \pi^\star(z),$$

pour tout $z' \in C'$ dans le support de $\pi^\star(z)$, on a

$$\operatorname{ord}_{z',C'}(\pi^\star(f_i)) = a_{z'} \cdot \operatorname{ord}_{z,C}(f_i) \ \text{ et } \ \operatorname{ord}_{z',C'}(\pi^\star(s^d)) = a_{z'} \cdot \operatorname{ord}_{z,C}(s^d),$$

de sorte que $\Delta'_{z'} = a_{z'} \cdot \Delta_z$. Cela montre l'égalité $\mathfrak{D}' = \sum_{z \in C} \Delta_z \cdot \pi^\star(z)$ et termine la preuve. $\square$

7. On remarque que le morphisme π est surjectif puisque π est dominant et fini.

La remarque suivante sera utilisée dans la démonstration du lemme 5.6.11.

Remarque 5.6.10. Supposons que $\mathbf{k}$ est un corps parfait et soit $r \in \mathbb{Z}_{>0}$. Alors l'application de Frobenius itéré $F : \mathbf{k} \to \mathbf{k}, \lambda \mapsto \lambda^{p^r}$ est un automorphisme de corps. Soit t une variable sur $\mathbf{k}$ et notons $x = t^{p^r}$. Étudions la ramification de l'extension algébrique $\mathbf{k}(t)/\mathbf{k}(x)$. Pour cela, choisissons un polynôme irréductible $P(x) \in \mathbf{k}[x]$. Alors, on a

$$P(x) = P(t^{p^r}) = (F^\star(P)(t))^{p^r},$$

où $F^\star(P) = \sum F^{-1}(a_i)T^i$, l'élément $a_i \in \mathbf{k}$ correspond au i-ème coefficient de P. On note que $F^\star(P)(t)$ est irréductible dans $\mathbf{k}[t]$. Soient C, C' les courbes projectives régulières sur $\mathbf{k}$ associées respectivement à $\mathbf{k}(t)$, $\mathbf{k}(x)$. On a $C \simeq \mathbb{P}^1_{\mathbf{k}} \simeq C'$. L'inclusion $\mathbf{k}(x) \subset \mathbf{k}(t)$ induit un morphisme fini purement inséparable $\pi : C' \to C$. Par le calcul précédent, pour tout $z \in C$, on a l'égalité[8] de diviseurs de Weil, $\pi^\star z = p^r \cdot z'$, où $z' \in C$ est dans la fibre schématique de $z \in C$.

Lemme 5.6.11. *Supposons que* $\mathbf{k}$ *est parfait. Soit* $\mathfrak{D}$ *un diviseur* σ*-polyédral propre sur* $C = \mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}$ *ou sur* $C = \mathbb{P}^1_{\mathbf{k}}$*. Supposons qu'il existe un cône maximal* ω *du quasi-éventail* $\Lambda(\mathfrak{D})$ *ou de* $\Lambda(\mathfrak{D}_{|\mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}})$*, respectivement selon les cas non elliptique et elliptique, tel que pour tout* $z \in C$ *différent de* $0, \infty$*,* $h_z|_\omega = 0$*. Soit* ∂ *la* LFIHD *de degré* e *sur l'algèbre* $A[C, \mathfrak{D}_\omega]$ *donnée par la formule* (5.6) (*voir les notations de* 5.6.7). *Considérons* p *l'exposant caractéristique de* $\mathbf{k}$*. Alors* ∂ *s'étend en une* LFIHD *sur* $A = A[C, \mathfrak{D}]$ *si et seulement si pour tout* $m \in \sigma_M^\vee$ *tel que* $m + p^{s_1}e \in \sigma_M^\vee$*, les assertions suivantes sont vraies.*

(i) *Si* $h_z(m + p^{s_1}e) \neq 0$ *alors* $\lfloor p^k h_z(m + p^{s_1}e)\rfloor - \lfloor p^k h_z(m)\rfloor \geq 1$*,* $\forall z \in C, z \neq 0, \infty$*.*

(ii) *Si* $h_0(m + p^{s_1}e) \neq h(m + p^{s_1}e)$ *alors* $\lfloor dh_0(m + p^{s_1}e)\rfloor - \lfloor dh_0(m)\rfloor \geq 1 - dh(p^{s_1}e)$*.*

(iii) *Si* $C = \mathbb{P}^1_{\mathbf{k}}$ *alors* $\lfloor dh_\infty(m + p^{s_1}e)\rfloor - \lfloor dh_\infty(m)\rfloor \geq -1 - dh(p^{s_1}e)$*.*

Ici h *est l'extension linéaire de* $h_0|_\omega$*,* d *est le plus petit entier strictement positif tel que* dh *est entière et* $d = lp^k$*, avec* p.g.c.d.$(l, p) = 1$*.*

Démonstration. Nous allons adapter à notre contexte les arguments de démonstration de [Li, 3.26]. En considérant $m \in \sigma_M^\vee$, nous pouvons écrire $h(m) = \langle m, v\rangle$, pour un $v \in N_{\mathbb{Q}}$. Puisque chaque h_z est concave, $h_z(m) \leq 0$, $\forall z \in C - \{0, \infty\}$, et évidemment $h_0(m) \leq h(m)$. En posant

$$A_M = \bigoplus_{m \in M} \varphi_m \mathbf{k}[t]\, \chi^m,$$

8. La vérification de cette égalité pour la place à l'infini est laissée au lecteur.

où $\varphi_m = t^{-\lfloor h(m) \rfloor}$ et en localisant par des éléments homogènes du noyau $\ker \partial$, par le lemme 5.3.5, ∂ s'étend en une LFIHD homogène sur l'algèbre A_M ; à nouveau, nous désignons par ∂ son extension. Ainsi ∂ s'étend en une LFIHD sur A si et seulement si l'extension ∂ sur A_M stabilise A.

Nous commençons par montrer que ∂ stabilise A dans des cas particuliers.

Cas $h = 0$. Dans ce cas, nous avons $d = 1$, $L = M$ et par le théorème 5.6.8, $\partial = \chi^e \partial_t$, pour une LFIHD ∂_t sur $\mathbf{k}[t]$. Nous supposons maintenant $\operatorname{car} \mathbf{k} = p > 0$. Pour le cas de la caractéristique zéro le lecteur peut consulter l'argument de [Li, 3.26] ; la démonstration est vraie *mutandis mutatis.*

La LFIHD ∂_t est donc déterminée par une suite $0 \leq s_1 < \ldots < s_r$ de nombres entiers (voir 5.3.4(d)). De plus, par le paragraphe d'avant, pour tout $z \in \mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}$, $h_z \leq 0$ et $h_\infty \geq 0$ pour le cas elliptique. En fixant $m \in \sigma_M^\vee$ tel que $m + p^{s_1} e \in \sigma_M^\vee$, les conditions de notre lemme deviennent

(i') Si $h_z(m + p^{s_1} e) \neq 0$ alors $\lfloor h_z(m + p^{s_1} e) \rfloor - \lfloor h_z(m) \rfloor \geq 1$, $\forall z \in \mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}$.

(iii') Si $C = \mathbb{P}^1_{\mathbf{k}}$ alors $\lfloor h_\infty(m + p^{s_1} e) \rfloor - \lfloor h_\infty(m) \rfloor \geq -1$.

Sous les hypothèses précédentes,

$$A_m = H^0(C, \mathcal{O}_C(\lfloor \mathfrak{D}(m) \rfloor)) \subset \mathbf{k}[t]$$

et ∂ stabilise A si et seulement si

$$f(t) \in A_m \Rightarrow \partial_t^{(i)}(f(t)) \in A_{m+ie}, \forall m \in \sigma_M^\vee, \forall i \in \mathbb{N},$$

ou de manière équivalente,

$$\operatorname{div} f + \lfloor \mathfrak{D}(m) \rfloor \geq 0 \Rightarrow \operatorname{div} \partial_t^{(i)}(f) + \lfloor \mathfrak{D}(m + ie) \rfloor \geq 0, \forall m \in \sigma_M^\vee, \forall i \in \mathbb{N}.$$

ou encore $\forall m \in \sigma_M^\vee, \forall i \in \mathbb{N}, \forall z \in C$,

$$\operatorname{ord}_z f + \lfloor h_z(m) \rfloor \geq 0 \Rightarrow \operatorname{ord}_z \partial_t^{(i)}(f) + \lfloor h_z(m + ie) \rfloor \geq 0. \tag{5.7}$$

Montrons que (i') $\Rightarrow$ (5.7). Si $h_z(m + p^{s_1} e) \neq 0$ avec $m \in \sigma_M^\vee$ tel que $m + p^{s_1} e \in \sigma_M^\vee$ alors on voit facilement que $h_z(m) \neq 0$, de sorte que $f \in (t - z)\mathbf{k}[t]$.

Soit $i \in \mathbb{N}$. Si $\partial_t^{(i)}(f) = 0$ alors $\partial_t^{(i)}(f) \in A_{m+ie}$. Sinon, $\partial_t^{(i)}(f) \neq 0$ et donc $m + ie \in \sigma^\vee$. Par conséquent, il existe $i_1, \ldots, i_r \in \mathbb{N}$ tels que

$$i_1 p^{s_1} + \ldots + i_r p^{s_r} = i, \;\; i_1 + \ldots + i_r \leq \operatorname{ord}_z f,$$

$$\operatorname{ord}_z \partial_t^{(i)}(f) = \operatorname{ord}_z(f) - (i_1 + \ldots + i_r) \geq 0$$

(voir l'argument de la démonstration du lemme 5.3.13). En posant $i = lp^{s_1}$ pour $l \in \mathbb{N}$, nous avons $l \geq i_1 + \ldots + i_r$. D'où il s'ensuit que

$$\mathrm{ord}_z \partial^{(i)}(f) + \lfloor h_z(m + ie) \rfloor \geq \mathrm{ord}_z(f) + \lfloor h_z(m) \rfloor + (\lfloor h_z(m + lp^{s_1} e) \rfloor - \lfloor h_z(m) \rfloor - l).$$

Par convexité de $\sigma^\vee$ pour $1 \leq j \leq l$, on a $m + jp^{s_1}e \in \sigma^\vee$. Si $h_z(m+ie) = 0$ alors (5.7) est vérifiée. Sinon $h_z(m + ie) \neq 0$ et en utilisant les inégalités précédentes, l'assertion (i′), et puisque $\mathrm{ord}_z f + \lfloor h_z(m) \rfloor \geq 0$, on obtient

$$\mathrm{ord}_z \partial^{(i)}(f) + \lfloor h_z(m + ie) \rfloor \geq \mathrm{ord}_z(f) + \lfloor h_z(m) \rfloor +$$

$$\sum_{j=1}^{r} (\lfloor h_z(m + (l-j)p^{s_1}e + p^{s_1}e) \rfloor - \lfloor h_z(m + (l-j)p^{s_1}e) \rfloor - 1) \geq 0$$

Cela donne (i′) $\Rightarrow$ (5.7).

Montrons maintenant la réciproque dans le cas où C est affine. Nous supposons que $\Lambda(\mathfrak{D})$ a moins deux éléments maximaux. Soit $\omega_0 \in \Lambda(\mathfrak{D})$ un élément maximal distinct de ω. Alors il existe un vecteur entier $m \in \mathrm{relint}\, \omega_0$ tel que $h_z(m) \in \mathbb{Z}$ et $\partial^{(lp^{s_1})}(\varphi_m) \neq 0$, pour $l \in \mathbb{N}$. Notons qu'ici le noyau est $\ker \partial = \bigoplus_{m \in \omega_M} \mathbf{k}\varphi_m \chi^m$. En prenant $s > 0$ suffisamment grand, par le lemme 5.3.13 et par le théorème de Lucas [9], nous avons

$$\partial^{(lp^{s_1})}(\varphi_m^{p^s+1}) \neq 0.$$

D'où nous pouvons supposer que $-h_z(m) \geq lp^{s_1}$. Ainsi, à nouveau par 5.3.13,

$$\mathrm{ord}_z \partial_t^{(lp^{s_1})}(\varphi_m) = -h_z(m) - l.$$

Par (5.7), il vient

$$\lfloor h_z(m + lp^{s_1}e) \rfloor - h_z(m) - l \geq 0. \tag{5.8}$$

En notant $\bar{h}_z$ l'extension linéaire de $h_z|_{\omega_0}$, nous obtenons

$$\lfloor h_z(m + lp^{s_1}e) \rfloor = \lfloor h_z(m) + l\bar{h}_z(p^{s_1}e) \rfloor = h_z(m) + \lfloor l\bar{h}_z(p^{s_1}e) \rfloor \tag{5.9}$$

9. On suppose que p est un nombre premier. Soient a, b des nombres entiers naturels de developpements p-adiques $a = \sum_{i=0}^{r} a_i p^i$ et $b = \sum_{i=0}^{r} b_i p^i$. Notons que a_r ou b_r peuvent être éventuellement nuls. Alors le théorème de Lucas affirme que l'on a la congruence $\binom{a}{b} \equiv \prod_{i=1}^{r} \binom{a_i}{b_i} \pmod p$. En particulier, $\binom{a}{b} \equiv 0 \pmod p$ si et seulement si il existe $i \in \{1, \ldots, r\}$ tel que $b_i > a_i$.

D'où (5.8) et (5.9) donnent

$$l\bar{h}_z(p^{s_1}e) \geq \lfloor l\bar{h}_z(p^{s_1}e)\rfloor \geq l$$

et donc $\bar{h}_z(p^{s_1}e) \geq 1$. Soit $m \in \sigma_M^\vee$ arbitraire. Alors,

$$\lfloor h_z(m + p^{s_1}e)\rfloor \geq \lfloor h_z(m)\rfloor + \lfloor \bar{h}_z(p^{s_1}e)\rfloor \geq \lfloor h_z(m)\rfloor + 1.$$

On conclut que (i′) est vraie lorsque que C est affine et lorsque $\Lambda(\mathfrak{D})$ a au moins deux éléments maximaux. Si ω est l'unique élément maximal de $\Lambda(\mathfrak{D})$ alors pour tout $z \in C$, h_z est identiquement nulle et (i′) est trivialement vérifiée. Par conséquent, (i′) est équivalente à (5.7) dans le cas où C est affine.

Supposons que C est projective. Alors pour tout $z \in C$ et pour tout $m \in \sigma_M^\vee$ tel que $A_m \neq 0$, on peut trouver $\varphi_{m,z} \in A_m$ satisfaisant $\mathrm{ord}_z(\varphi_{m,z}) + \lfloor h_z(m)\rfloor = 0$. En remplaçant φ_m par $\varphi_{m,z}$ dans l'argument ci-dessus et en utilisant le lemme 5.3.14 pour $z = \infty$, nous obtenons l'équivalence entre (5.7) et (i′), (iii′).

Cas h entière. Nous supposons que la caractéristique de $\mathbf{k}$ est arbitraire. Dans ce nouveau cas, nous avons $d = 1$. En remplaçant le diviseur polyédral $\mathfrak{D}$ par $\mathfrak{D}' = \mathfrak{D} + (-v + \sigma)\cdot 0$ si C est affine, et $\mathfrak{D}$ par $\mathfrak{D}' = \mathfrak{D} + (-v + \sigma)\cdot 0 + (v + \sigma)\cdot\infty$ si C est projective, nous revenons à l'étape précédente. En utilisant l'isomorphisme $A \simeq A[C', \mathfrak{D}']$, l'algèbre A est ∂-stable si et seulement si les assertions (i′), (iii′) sont vraies pour le diviseur polyédral $\mathfrak{D}'$. Un calcul facile montre que cela est équivalent à ce que $\mathfrak{D}$ satisfait (i), (ii), (iii) pour $d = 1$ et $k = 0$.

Cas général. Nous pouvons supposer que la fonction h n'est pas entière, i.e., $d > 1$. Nous considérons la normalisation de B de

$$A[\zeta^{-dh(w)}\chi^w] \subset \mathbf{k}(\zeta)[M],$$

où $\zeta = \sqrt[d]{t}$, et où $w \in \mathrm{relint}\,\omega_M$ satisfait p.g.c.d.$(dh(w), d) = 1$, de sorte que B est une extension cyclique de A. Notons que B est naturellement M-graduée. Nous obtenons que

$$K_0' = \left\{\frac{a}{b} \,|\, a, b \in B_m,\ m \in M, b \neq 0\right\} = \mathbf{k}(\zeta).$$

En particulier, $\mathbf{k}$ est algébriquement clos dans B. Ainsi, nous pouvons écrire $B = A[C', \mathfrak{D}']$ avec $C' \simeq \mathbb{P}^1_{\mathbf{k}}$ si A est elliptique et $C' \simeq \mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}$ dans le cas contraire. Notons $d = p^k l$ avec $k, l \in \mathbb{N}$ et p.g.c.d.$(l, p) = 1$. Si $\pi : C' \to C$ est le morphisme induit par l'inclusion

$$K_0 = \mathbf{k}(t) \subset \mathbf{k}(\zeta) = K_0',$$

alors par la remarque 5.6.10 (qui utilise l'hypothèse de perfection sur le corps $\mathbf{k}$), l'exercice 3.8 dans [St, Section 3.12], et le lemme 5.6.9, on obtient

$$\mathfrak{D}' = d \cdot \Delta_0 \cdot 0 + \sum_{z' \in C' - \{0\}} p^k \cdot \Delta_{z'} \cdot z' \text{ si } C = \mathbb{A}^1_{\mathbf{k}},$$

et

$$\mathfrak{D}' = d \cdot \Delta_0 \cdot 0 + d \cdot \Delta_\infty \cdot \infty + \sum_{z' \in C' - \{0,\infty\}} p^k \cdot \Delta_{z'} \cdot z' \text{ si } C = \mathbb{P}^1_{\mathbf{k}}.$$

Donc $h'_0 = dh_0$, $h'_\infty = dh_\infty$, et $h'_{z'} = p^k h_z$, avec $\pi(z') = z$ et $h'_{z'}$ est la fonction de support de $\mathfrak{D}'$ au point $z' \in C'$. De plus, $h'_0|_\omega$ est entière et B satisfait les conditions du cas précédent. Notons

$$B'_M = \bigoplus_{m \in M} \varphi'_m \, \mathbf{k}[\zeta] \, \chi^m, \text{ avec } \varphi'_m = \zeta^{-dh(m)}.$$

Puisque $A_M \subset B_M$ est cyclique, par le lemme 5.3.6, la LFIHD ∂ sur A_M s'étend en une LFIHD sur B_M, notée encore ∂. De plus, A est ∂-stable si et seulement si B est ∂-stable (voir les arguments de démonstration de [Li, 3.26]). Par le cas précédent, B est ∂-stable si et seulement si, pour tout $m \in \sigma^\vee_M$ tel que $m + p^{s_1}e \in \sigma^\vee_M$, les conditions suivantes sont vraies.

(i") Si $h'_{z'}(m + p^{s_1}e) \neq 0$ alors $\lfloor h'_{z'}(m + p^{s_1}e) \rfloor - \lfloor h'_{z'}(m) \rfloor \geq 1$, $\forall z' \in C' - \{0, \infty\}$.

(ii") Si $h'_0(m + p^{s_1}e) \neq h'(m + p^{s_1}e)$, alors $\lfloor h'_0(m + p^{s_1}e) \rfloor - \lfloor h'_0(m) \rfloor \geq 1 + h'(p^{s_1}e)$.

(iii") Si $C = \mathbb{P}^1_{\mathbf{k}}$ alors $\lfloor h'_\infty(m + p^{s_1}e) \rfloor - \lfloor h'_\infty(m) \rfloor \geq -1 - h'(p^{s_1}e)$.

En remplaçant, dans (i$''$) $-$ (iii$''$), h' par dh, h'_0 par dh_0, h'_∞ par dh_∞ et $h'_{z'}$ par $p^k h_z$, cela montre que A est ∂-stable si et seulement si (i) $-$ (iii) est vraie. D'où le résultat. $\square$

Le théorème suivant donne une classification des $\mathbb{T}$-variétés affines horizontales de complexité 1 sur un corps parfait. Ce théorème est une conséquence immédiate des résultats précédents de cette section.

Théorème 5.6.12. *Supposons que le corps de base* $\mathbf{k}$ *est parfait. Considérons* p *l'exposant caractéristique de* $\mathbf{k}$. *Soit* $\mathfrak{D}$ *un diviseur* σ*-polyédral propre sur une courbe régulière* C *et posons* $A = A[C, \mathfrak{D}]$. *Soient* $\omega \subset M_{\mathbb{Q}}$ *un cône et* $e \in M$. *Alors il existe une* LFIHD *homogène de type horizontal sur* A *avec* $\deg \partial = e$ *et avec* ω *comme cône des poids de* $\ker \partial$ *si et seulement si les conditions conditions* (i) $-$ (iv) *sont satisfaites.*

(i) $C = \mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}$ *ou* $C = \mathbb{P}^1_{\mathbf{k}}$.

(i') *Si* $C = \mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}$ *alors* ω *est un cône maximal dans le quasi-éventail* $\Lambda(\mathfrak{D})$*, et il existe un point rationnel* $z_0 \in C$ *tel que* $h_{z|\omega}$ *est entier* $\forall z \in C, z \neq z_0$.

(i") *Si* $C = \mathbb{P}^1_{\mathbf{k}}$ *alors il existe un point rationnel* z_∞ *tel que* (i') *est vraie pour* $C_0 := \mathbb{P}^1_{\mathbf{k}} - \{z_\infty\}$.

Sans perte de généralité, on peut supposer que $z_0 = 0$, $z_\infty = \infty$, *et* $h_{z|\omega} = 0$ $\forall z \in C, z \neq 0, z \neq \infty$. *Soit* h *l'extension linéaire de* $h_{0|\omega}$, $d > 0$ *le plus petit entier tel que* dh *est entière et* $d = lp^k$, *avec* p.g.c.d.$(l, p) = 1$.

(ii) *Il existe* $s_1 \in \mathbb{N}$ *tel que* $-1/d - h(p^{s_1}e) \in \mathbb{Z}$.

Pour tout $m \in \sigma_M^\vee$ *tel que* $m + p^{s_1}e \in \sigma_M^\vee$, *les assertions suivantes sont vraies.*

(iii) *Si* $h_z(m + p^{s_1}e) \neq 0$ *alors* $\lfloor p^k h_z(m + p^{s_1}e)\rfloor - \lfloor p^k h_z(m)\rfloor \geq 1$, $\forall z \in C, z \neq 0, \infty$.

(iv) *Si* $h_0(m + p^{s_1}e) \neq h(m + p^{s_1}e)$ *alors* $\lfloor dh_0(m + p^{s_1}e)\rfloor - \lfloor dh_0(m)\rfloor \geq 1 - dh(p^{s_1}e)$.

(v) *Si* $C = \mathbb{P}^1_{\mathbf{k}}$ *alors* $\lfloor dh_\infty(m + p^{s_1}e)\rfloor - \lfloor dh_\infty(m)\rfloor \geq -1 - dh(p^{s_1}e)$.

Plus précisément, toute LFIHD *homogène* ∂ *de type horizontal sur* A *avec* e, ω *satisfaisant* (i) $-$ (iv) *est donnée par la formule* (5.6) *du théorème* 5.6.8; *si* $\operatorname{car}\mathbf{k} > 0$ *alors* ∂ *est décrite par une suite d'entiers* $0 \leq s_1 < s_2 < \ldots < s_r$, *où chaque* $-1/d - h(p^{s_i}e)$ *est entier. De plus,*

$$\ker \partial = \bigoplus_{m \in \omega_L} \mathbf{k}\varphi_m \chi^m,$$

où $L = h^{-1}(\mathbb{Z})$ *et* $\varphi_m \in A_m$ *satisfait la relation*

$$\operatorname{div} \varphi_m + \mathfrak{D}(m) = 0 \text{ si } C = \mathbb{A}^1_{\mathbf{k}} \text{ ou } (\operatorname{div} \varphi_m)_{|C_0} + \mathfrak{D}(m)_{|C_0} = 0 \text{ si } C = \mathbb{P}^1_{\mathbf{k}}.$$

Dans la suite, nous réécrivons les résultats du théorème 5.6.12 dans le langage des diviseurs polyédraux coloriés (voir [AL, Section 1]). La lettre C désigne indifféremment les courbes $\mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}$ ou $\mathbb{P}^1_{\mathbf{k}}$.

Définition 5.6.13. Un *diviseur* σ*-polyédral colorié* sur C est une collection $\widetilde{\mathfrak{D}} = \{\mathfrak{D}, v_z \,|\, z \in C\}$ si $C = \mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}$ et $\widetilde{\mathfrak{D}} = \{\mathfrak{D}, z_\infty, v_z \,|\, z \in C - \{z_\infty\}\}$ si $C = \mathbb{P}^1_{\mathbf{k}}$, satisfaisant les conditions suivantes.

(1) $\mathfrak{D} = \sum_{z \in C} \Delta_z \cdot z$ est un diviseur σ-polyédral propre sur C, $z_\infty \in C$ est un point rationnel et v_z est un sommet de Δ_z. Posons $C' = C$ si $C = \mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}$ et $C' = C - \{z_\infty\}$ si $C = \mathbb{P}^1_{\mathbf{k}}$.

(2) $v_{\deg} := \sum_{z \in C'} [\kappa_z : \mathbf{k}] \cdot v_z$ est un sommet de $\deg \mathfrak{D}_{|C'}$.

(3) $v_z \in N$ sauf pour au plus un point rationnel $z_0 \in C$.

Nous disons que $\widetilde{\mathfrak{D}}$ est un *coloriage* de $\mathfrak{D}$. Le point z_0 est appelé le *point base* (ou le point marqué), z_∞ est le *point à l'infini* si $C = \mathbb{P}^1_{\mathbf{k}}$ et v_z est une *couleur* du polyèdre Δ_z.

5.6.14. Soit $\widetilde{\mathfrak{D}}$ un diviseur σ-polyédral colorié. Alors il est possible de construire le cône ω de l'énoncé 5.6.12 à partir de $\widetilde{\mathfrak{D}}$. En effet, le dual $\omega^\vee$ de ω peut être défini comme le cône polyédral de $N_\mathbb{Q}$ engendré par $\deg \mathfrak{D}_{|C'} - v_{\deg}$. Nous désignons par $\hat{M}$ et $\hat{N}$ les réseaux respectifs $M \times \mathbb{Z}$ et $N \times \mathbb{Z}$. Notons $\widetilde{\omega}^\vee \subset \hat{N}_\mathbb{Q}$ le cône engendré par $(\omega^\vee, 0)$ et $(v_{z_0}, 1)$ si $C = \mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}$ et par $(\omega^\vee, 0)$, $(v_{z_0}, 1)$ et $(\Delta_{z_\infty} + v_{\deg} - v_{z_0} + \omega^\vee, -1)$ si $C = \mathbb{P}^1_{\mathbf{k}}$. Désignons aussi par d le plus petit entier strictement positif tel que $dv_{z_0} \in N$. Le cône $\omega^\vee$ est dit *associé* au diviseur σ-polyédral colorié $\widetilde{\mathfrak{D}}$.

Nous introduisons maintenant la notion d'assemblage cohérent. Voir [AL, 1.9] pour le cas classique.

Définition 5.6.15. Un quadruplet $(\widetilde{\mathfrak{D}}, e, s, \lambda)$, où $\widetilde{\mathfrak{D}}$ est un diviseur σ-polyédral colorié, $e \in M$, s est une suite $0 \leq s_1 < s_2 < \ldots < s_r$ de nombres entiers et λ est une suite $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ de $\mathbf{k}^\star$, est appelé un *assemblage cohérent* si les conditions suivantes sont satisfaites.

(A) Notons p l'exposant caractéristique de $\mathbf{k}$. Pour tout $i = 1, \ldots, r$, il existe $u_i \in \mathbb{Z}$ tel que $\widetilde{e}_i = (p^{s_i}e, u_i) \in \hat{M}$ est une racine de Demazure du cône $\widetilde{\omega}^\vee$ avec rayon distingué $\widetilde{\rho} = (d \cdot v_{z_0}, d)$. En particulier $u_i = -1/d - \langle p^{s_i}e, v_{z_0}\rangle$.

(B) $p^k\langle p^{s_1}e, v\rangle \geq 1 + p^k\langle p^{s_1}e, v_z\rangle$, pour tout $z \in C' - \{z_0\}$ et pour tout sommet v non colorié du polyèdre Δ_z, où $d = lp^k$ avec p.g.c.d.$(l, p) = 1$.

(C_0) $d\langle p^{s_1}e, v\rangle \geq 1 + d\langle p^{s_1}e, v_{z_0}\rangle$, pour tout sommet $v \neq v_{z_0}$ du polyèdre Δ_{z_0}.

(C_∞) Si $C = \mathbb{P}^1_{\mathbf{k}}$ alors $d\langle p^{s_1}e, v\rangle \geq -1 - d\langle p^{s_1}e, v_{\deg}\rangle$, pour tout sommet $v \in \Delta_{z_\infty}$.

Le théorème suivant donne une classification des LFIHD homogènes de type horizontal sur $A[C, \mathfrak{D}]$ en termes d'assemblages cohérents. Ce résultat est une conséquence immédiate du théorème 5.6.12.

Théorème 5.6.16. *Soit $\mathfrak{D}$ un diviseur σ-polyédral propre sur $C = \mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}$ ou $C = \mathbb{P}^1_{\mathbf{k}}$. Alors l'ensemble des* LFIHD *homogènes de type horizontal sur l'algèbre $A[C, \mathfrak{D}]$ est en bijection avec l'ensemble des assemblages cohérents $(\widetilde{\mathfrak{D}}, e, s, \lambda)$ où $\widetilde{\mathfrak{D}}$ est un coloriage de $\mathfrak{D}$. La* LFIHD *associée à $(\widetilde{\mathfrak{D}}, e, s, \lambda)$ a degré e et vérifie la formule* (5.6) *du théorème* 5.6.8. *De plus,*

$$\ker \partial = \bigoplus_{m \in \omega_L} \mathbf{k}\varphi_m \chi^m,$$

où $L = \{m \in M \mid \langle m, v_{z_0}\rangle \in \mathbb{Z}\}$, $\omega^\vee$ *est le cône associé à* $\widetilde{\mathfrak{D}}$ *et* φ_m *satisfait les conditions du théorème* 5.6.12.

Donnons un exemple d'une LFIHD homogène de type horizontal.

Exemple 5.6.17. Supposons que $\mathbf{k}$ est un corps parfait. On considère le diviseur σ-polyédral propre $\mathfrak{D} = \Delta_0 \cdot 0 + \Delta_1 \cdot 1 + \Delta_\infty \cdot \infty$ sur la droite projective $\mathbb{P}^1_{\mathbf{k}}$ dont les coefficients non triviaux sont donnés par

$$\Delta_0 = \left(\frac{1}{2}, 0\right) + \sigma,\ \ \Delta_1 = \left[(0,0), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right] + \sigma,\ \ \Delta_\infty = \left(\frac{1}{2}, 0\right) + \sigma,$$

où $\sigma = \mathbb{Q}^2_{\geq 0}$. Considérons les fractions rationnelles

$$t_1 = \frac{t-1}{t}\chi^{(2,0)},\ \ t_2 = \chi^{(0,1)},\ \ t_3 = \chi^{(1,1)},\ \ t_4 = \frac{(t-1)^2}{t}\chi^{(2,0)}.$$

En calculant un ensemble de générateurs homogènes, on vérifie que $A = A[\mathbb{P}^1_{\mathbf{k}}, \mathfrak{D}] = \mathbf{k}[t_1, t_2, t_3, t_4]$. Les éléments t_1, t_2, t_3, t_4 satisfont la relation irréductible

$$t_1t_2^2t_4 + t_1^2t_2^2 - t_3^2t_4 = 0.$$

Ainsi, on obtient un isomorphisme d'algèbres

$$A \simeq \frac{\mathbf{k}[x_1, x_2, x_3, x_4]}{(x_1x_2^2x_4 + x_1^2x_2^2 - x_3^2x_4)},$$

envoyant t_i sur la classe de x_i, où x_1, x_2, x_3, x_4 sont des variables indépendantes sur $\mathbf{k}$. Donnons un exemple de LFIHD homogène de type horizontal sur $A = A[\mathbb{P}^1_{\mathbf{k}}, \mathfrak{D}]$. Tout d'abord, on remarque que

$$\widetilde{\mathfrak{D}} = \left\{\mathfrak{D}, z_\infty = \infty,\ \ v_0 = \left(\frac{1}{2}, 0\right),\ \ v_1 = (0,0)\right\}$$

est une coloration de $\mathfrak{D}$. En effet, en posant $C' = \mathbb{P}^1 - \{\infty\}$, le vecteur $v_{\deg} = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$ est un sommet de

$$\deg \mathfrak{D}_{|C'} = \left[\left(\frac{1}{2}, 0\right), \left(0, \frac{1}{2}\right)\right].$$

Le cône $\omega^\vee \subset \mathbb{Q}^2$ engendré par $\deg \mathfrak{D}_{|C'} - v_{\deg}$ est $\mathbb{Q}_{\geq 0}(-1,1) + \mathbb{Q}_{\geq}(1,0)$, de sorte que $\omega = \mathbb{Q}_{\geq 0}(1,1) + \mathbb{Q}_{\geq 0}(0,1)$ est un élément maximal du quasi-éventail $\Lambda(\mathfrak{D}_{|C'})$. De plus,

$$L = \{m \in \mathbb{Z}^2 \mid \langle m, v_0\rangle \in \mathbb{Z}\} = \{(2m_1, m_2) \mid m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\}.$$

Donc pour tout assemblage cohérent associé à la coloration $\widetilde{\mathfrak{D}}$, le noyau de la LFIHD correspondante est égal à

$$\bigoplus_{m_2-2m_1\geq 0, m_1\geq 0} \mathbf{k}\, t^{-m_1}\chi^{(2m_1,m_2)}.$$

On observe aussi que

$$\widetilde{\omega}^\vee = \mathbb{Q}_{\geq 0}(-1,1,0)+\mathbb{Q}_{\geq 0}(1,0,0)+\mathbb{Q}_{\geq 0}(-1,0,2)+\mathbb{Q}_{\geq 0}(-1,1,1)+\mathbb{Q}_{\geq 0}(1,0,1).$$

Supposons que la caractéristique du corps $\mathbf{k}$ est 3. Posons $e=(1,2)$. Alors $\widetilde{e}=(3e,1)$ est une racine de $\widetilde{\omega}^\vee$ de rayon distingué $\widetilde{\rho}=(dv_0,d)=(-1,0,2)$. Considérons l'assemblage cohérent $(\widetilde{\mathfrak{D}}, e=(1,2), s=1, \lambda=1)$ et soit ∂ la LFIHD associée. Rappelons que si $t^r\chi^m \in A$, $m=(m_1,m_2)$ et si $\widetilde{e}=(p^s e, u)$ alors

$$e^{x\partial}(t^r\chi^m)=\sum_{i=0}^{\infty}\binom{d(\langle m, v_0\rangle + r)}{i}\chi^{m+ip^s e}t^{r+iu}x^{ip^s}.$$

Ici, on a $d=2$, $p=3$, $s=1$, $u=1$, et donc

$$e^{x\partial}(t^r\chi^m)=\sum_{i=0}^{\infty}\binom{m_1+2r}{i}\chi^{(m_1+3i,m_2+6i)}t^{r+i}x^{3i}.$$

En remarquant que

$$\eta := (t_1+t_4)t_2^2+t_3^2 = t\chi^{(2,2)},$$

dans les coordonnées t_1,t_2,t_3,t_4, nous avons

$$e^{x\partial}(t_1)=t_1-t_2t_3^3\eta\, x^3+t_2^4t_3^4\eta^2x^6, \quad e^{x\partial}(t_2)=t_2,$$

$$e^{x\partial}(t_3)=t_3+t_2^3t_3^2\eta\, x^3,$$

$$e^{x\partial}(t_4)=t_4+(t^2-t)\chi^{(5,6)}x^3+t^2\chi^{(8,12)}x^6+t^4\chi^{(11,18)}x^9+t^5\chi^{(14,24)}x^{12}$$

$$=t_4+(t_2t_3\eta^2-t_2t_3^3\eta)x^3+t_2^4t_3^4\eta^2x^6+t_2^7t_3^3\eta^4x^9+t_2^{10}t_3^4\eta^5x^{12}.$$

Bibliographie

[AH] K. Altmann, J. Hausen. *Polyhedral divisors and algebraic torus actions.* Math. Ann. **334**. (2006). 557-607.

[AHS] K. Altmann, J. Hausen, H. Süss. *Gluing affine torus actions via divisorial fans.* Transform. Groups. **13**. (2008). 215-242.

[AOPSV] K. Altmann, N. Owen Ilten, L. Petersen, H. Süss, R. Volmert. *The geometry of T-varieties.* IMPANGA Lecture Notes. Contributions to Algebraic Geometry. (2012). 17-69.

[AFKKZ] I. Arzhantsev, H. Flenner, S. Kaliman, F. Kutzschebauch, M. Zaidenberg. *Flexible varieties and automorphism groups.* Duke Math. J. **162**. (2013). 767-823.

[AHHL] I.V. Arzhantsev, J. Hausen, E. Herppich, A. Liendo. *The automorphism group of a variety with torus action of complexity one.* arXiv :1202.4568v3. 34p.

[AKZ] I.V. Arzhantsev, K. Kuyumzhiyan, M. Zaidenberg. *Flag varieties, toric varieties, and suspensions : three instances of infinite transitivity.* Mat. Sbornik. **203**. (2012). 3-30. ; English translation : Sbornik Math. **203**. (2012). 923-949.

[AL] I.V. Arzhantsev, A. Liendo. *Polyhedral divisors and SL_2-actions on affine T-varieties.* Michigan Math. J. **61**. (2012). 731-762.

[As] T. Asanuma. *Purely inseparable k-forms of affine algebraic curves.* Comtemp. Math. **369**. (2005). 31-46.

[Ba] I. Bazhov. *On orbits of the automorphism group on a complete toric variety.* arXiv :1203.2902. 12p.

[BoTi] A. Borel, J. Tits. *Groupes réductifs.* Pub. Math. I.H.É.S. **27**. (1965). 55-151.

[Bou] N. Bourbaki. *Elements of Mathematics.* Commutative Algebra. Vol 8. Hermann. (1972).

[Br] M. Brion. *Sur la géométrie des variétés sphériques.* Comment. Math. Helv. **66**. (1991). 237-262.

[BGN] W. Bruns, J. Gubeladze, T. Ngô Viêt. *Normal polytopes, triangulations, and Koszul algebras.* J. Reine Angew. Math. **485**. (1997). 123-160.

[Bry] J.L. Brylinski. *Décomposition simpliciale d'un réseau, invariante par un groupe fini d'automorphismes.* C.R. Acad. Paris. **288**. (1979). 137-139.

[CTHS] J.-L. Colliot-Thélène, D. Hararin, A.N. Skorobogatov. *Compactification d'un tore (d'après Brylinski et Künnemann).* Expo. Math. **23**. (2005). 161-170.

[CLS] D. Cox, J. Little, H. Schenck. *Toric Varieties.* Graduate Studies in Mathematics. AMS. **124**. (2011).

[Cr] A. Crachiola. *On the AK invariant of certain domains.* Thesis (Ph.D.). Wayne State University. (2004).

[CM] A. Crachiola, L. Makar-Limanov. *On the rigidity of small domains.* J. Algebra. **284**. (2005). 1-12.

[Da] V.I. Danilov. *The Geometry of Toric Varieties.* Russian Math. Surveys. **33**. (1978). 97-154.

[De] M. Demazure. *Sous-groupes algébriques de rang maximum du groupe de Cremona.* Ann. Sci. École. Norm. Sup. **3**. (1970). 507-588.

[De 2] M. Demazure. *Anneaux gradués normaux.* Trav. Cours 37. (1988). 35-68.

[Do] I.V. Dolgachev. *Automorphic forms and quasihomogeneous singularities.* Func. Anal. Appl. **9**. (1975). 149-151.

[Du] A. Dubouloz. *Quelques remarques sur la notion de modification affine.* arxiv : 0503142. (2005). 5p.

[ELST] E.J. Elizondo, P. Lima-Filho, F. Sottile, Z. Teitler. *Arithmetic toric varieties.* arxiv : 1003.5141v3. (2013). 31p.

[FiKa] K.H. Fieseler, L. Kaup. *On the geometry of affine algebraic $\mathbb{C}^\star$-surfaces.* Sympos. Math. XXXII. Academic Press. London. (1991). 111-140.

[FZ] H. Flenner, M. Zaidenberg. *Normal affine surfaces with $\mathbb{C}^\star$-actions.* Osaka J.Math. **40**. (2003). 981-1009.

[FZ 2] H. Flenner, M. Zaidenberg. *Locally nilpotent derivations on affine surfaces with a $\mathbb{C}^*$-action.* Osaka. J.Math. **42**. (2005). 931-974.

[FZ 3] H. Flenner, M. Zaidenberg. *On the uniqueness of $\mathbb{C}^\star$-actions on affine surfaces.* Comtemp. Math. **369**. (2005). 97-111.

[Fre] G. Freudenburg. *Algebraic theory of locally nilpotent derivations.* Encyclopaedia of Mathematical Sciences. **136**. Invariant Theory and Algebraic Transformation Groups **7**. Springer. (2006).

[Fu] W. Fulton. *Introduction to toric varieties.* Princeton University Press. **131**. (1993).

[GY] S. Goto, K. Yamagishi. *Finite Generation of Noetherian Graded Rings.* Proc. Amer. **89**. (1983).

[EGA II] A. Grothendieck. *Éléments de Géométrie Algébrique II.* Etude globale élémentaire de quelques classes de morphismes (en collaboration avec J. Dieudonné). Pub. Math. I.H.É.S. tome 8. (1961). 5-222.

[Ha] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry.* Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag. **52**. (1977).

[HaSc] H. Hasse, F. K. Schmidt. *Noch eine Begründung der Theorie des höheren Differentialquotienten in einem algebraischen Funktionenkörper in einer Unbestimmten.* J. Reine Angew. Math. **177**. (1937). 215-237.

[Ho] M. Hochster. *Rings of invariants of tori, Cohen-Macaulay rings generated by monomials and Polytopes.* Ann. of Math. **96**. (1972). 318-337.

[HS] C. Huneke, I. Swanson. *Integral Closure of Ideals, Rings and Modules.* Polycopié : http ://people.reed.edu/ iswanson/book/.

[Hu] M. Huruguen. *Toric varieties and spherical embeddings over an arbitrary field.* J. of Algebra. **342**. (2011). 212-234.

[Hu 2] M. Huruguen. *Compactification d'espaces homogènes sur un corps quelconque.* Ph.d. thesis. Institut Fourier. (2012)

[JKS] S. Jeong, M. S. Kim, J. W. Son. *On explicit formulae for Bernoulli numbers and their counterparts in positive characteristic.* J. Number Theory. **113**. (2005). 53-68.

[KZ] S. Kaliman, M. Zaidenberg. *Affine modifications and affine hypersurfaces with a very transitive automorphism group.* Transform. Groups. **4**. (1999). 53-95.

[Ka] N. Karroum. *Normale affine Fläschen mit $\mathbb{G}_m$-Wirkung über Dedekindringen.* Master Thesis Bochum (unpublished). (2004).

[KKMS] G. Kempf, F. Knudsen, D. Mumford, B. Saint-Donat. *Toroidal embeddings. I.* Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag. Berlin. **339**. (1973).

[Ko] P. Kotenkova. *On restriction of roots of affine T-varieties.* arXiv :1104.0560v3. 10p.

[Ku] S. Kuroda. *A condition for finite generation of the kernel of a derivation.* J. Algebra. **262**. (203). 391-400.

[La] K. Langlois. *Clôture intégrale et opérations de tores algébriques de complexité un dans les variétés affines.* Transform. Groups. **18**. (2013). 739-765.

[La 2] K. Langlois. *Polyhedral Divisors, Dedekind Domains and Algebraic Function Fields.* arxiv : 1207.0208. (2012). 22p.

[LL] K. Langlois. A. Liendo. *Affine $\mathbb{T}$-varieties of complexity one and additive group actions.* (en préparation).

[LeTe] M. Lejeune-Jalabert, B. Teissier. *Clôture intégrale des idéaux et équisingularité.* Séminaire Lejeune-Teissier. Centre de Mathématiques École Polytechnique. (1974).

[Li] A. Liendo. *Affine $\mathbb{T}$-varieties of complexity one and locally nilpotent derivations.* Transform. Groups. **15**. (2010). 389-425.

[Li 2] A. Liendo. *$\mathbb{G}_a$-actions of fiber type on affine $\mathbb{T}$-varieties.* J. Algebra. **324**. (2010). 3653-3665.

[Li 3] A. Liendo. *Roots of the affine Cremona groups.* Transform. Groups. **16**. (2011). 1137-1142.

[LS] A. Liendo, H. Süss. *Normal Singularities with Torus Actions.* Tohoku Math. J. **65**. (2013). 105-130.

[Liu] Q. Liu. *Algebraic geometry and arithmetic curves.* Oxford Graduate Texts in Mathematics. **6**. (2002).

[LV] D. Luna, T. Vust. *Plongements d'espaces homogènes.* Comment. Math. Helv. **58**. (1983). 186-245.

[Ma] A. Maurischat. *Galois theory for iterative connections and nonreduced Galois groups.* Trans. Amer. Math. Soc. **362**. (2010). 5411-5453.

[Mi] M. Miyanishi. *A remark on an iterative infinite higher derivation.* J. Math. Kyoto Univ. **8**. (1968). 411-415.

[Ni] N. Bill. *Complete toric varieties with reductive automorphism group.* Math. Z. **252**. (2006). 767-786.

[NR] D.G. Northcott, D. Rees. *Reductions of ideals in local rings.* Proc. Cambridge. Philos. Soc. **50**. (1954). 145-158.

[Od] T. Oda. *Convex Bodies and Algebraic Geometry. An Introduction to the Theory of Toric Varieties.* Springer-Verlag. Berlin. **131**. (1985).

[Pi] H. Pinkham. *Normal surface singularities with $\mathbb{C}^\star$-action.* Math. Ann. **227**. (1977). 183-193.

[Ro] M. Rosenlicht. *A remark on quotient spaces.* An. Acad. Brasil. Ci. **35**. (1963). 487-489.

[RRV] L. Reid, L. G. Roberts, M. A. Vitulli. *Some results on normal homogeneous ideals.* Comm. in Alg. **31**. (2003). 4485-4506.

[Ri] P. Ribenboim. *Anneaux de Rees intégralement clos.* J. Reine Angew. Math. **204**. (1960). 99-107.

[Ru] P. Russell. *Forms of the affine line and its additive group.* Pacific J. Math. **32**. (1970). 527-539.

[Se] A. Seidenberg. *Derivations and integral closure.* Pacific J. Math. **16**. (1966). 167-173.

[Ser] J. P. Serre. *Galois cohomology.* Springer Verlag. (1996).

[Sp] T. A. Springer. *Linear Algebraic Groups.* Progress in Mathematics. Birkäuser Boston. Second edition. (1998).

[St] H. Stichtenoth. *Algebraic Function Fields and Codes.* Universitext, Springer-Verlag. (1993).

[Ti] D. Timashev. *Torus actions of complexity one.* In : Toric topology. Contemp. Math. AMS. **60**. (2008). 349-364.

[Ti 2] D. Timashev. *Classification of G-manifolds of complexity* 1. Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. **61**. (1997). 127-162.

[Va] W. Vasconcelos. *Integral closure : Rees algebras, multiplicities, algorithms.* Springer. Monographs in Mathematics. XII. (2005). 519p.

[Vie] E. Viehweg. *Rational singularities of higher dimensional schemes.* Proc. Amer. Soc. **63**. (1977). 6-8.

[Vit] M. A. Vitulli. *Some normal monomial ideals.* Contemp. Math. **324**. (2003). 205-217.

[Voj] P. Vojta. *Jets via Hasse-Schmidt Derivations.* Proc. Diophantine Geometry. U. Zannier (ed.). Edizioni della Normale. (2007). 335-361.

[Vol] R. Vollmert. *Toroidal embeddings and polyhedral divisors.* Int. J. Algebra. **4**. (2010). 383-388.

[Vos] V.E. Voskresenskii. *Projective invariant Demazure models.* Math. USSR Izvestiya. **20**. (1983). 189-202.

[Za] O. Zariski. *Polynomial ideals defined by infinitely near base points.* Amer. J. Math. **60**. (1938). 151-204.

[ZS] O. Zariski, P. Samuel. *Commutative Algebra.* Van Nostrand. Princeton. Vol. II. (1960).